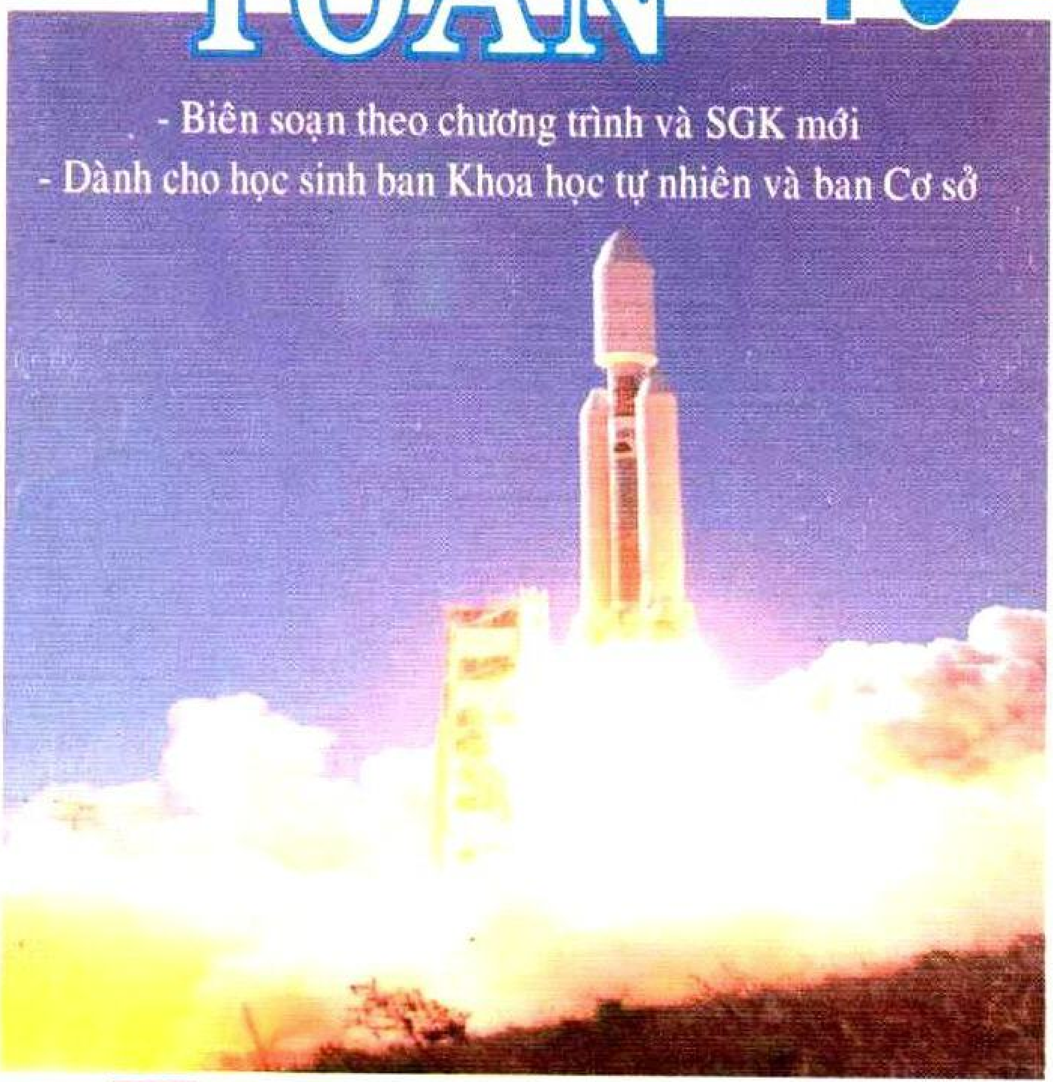
NGUYỄN VĂN NHO
LÊ HOÀNH PHÒ

SỔ TAY TOÁN 10

- Biên soạn theo chương trình và SGK mới
- Dành cho học sinh ban Khoa học tự nhiên và ban Cơ sở



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN VĂN NHO
LÊ HOÀNH PHÒ

SỔ TAY
TOÁN
10

- Biên soạn theo chương trình và SGK mới
- Dành cho học sinh ban Khoa học tự nhiên và ban Cơ sở

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Phần

ĐẠI SỐ

Chương 1

MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

---

§ 1. MỆNH ĐỀ

1.1. Mỗi mệnh đề phải hoặc đúng hoặc sai, nó không thể vừa đúng vừa sai. Cho một mệnh đề A, mệnh đề phủ định $\overline{A}$ đúng khi A sai. Ngược lại, $\overline{A}$ sai khi A đúng.

Ví dụ: "4.3 = 12": Mệnh đề đúng.

A: "Tổng các góc trong một hình thoi bằng 180^0". A là mệnh đề sai. $\overline{A}$: "Tổng các góc trong một hình thoi *không* bằng 180^0". $\overline{A}$ là mệnh đề đúng. Tuy nhiên: "Tổng các góc trong một tam giác bằng 180^0 hay không" không phải là mệnh đề.

1.2. *Mệnh đề kéo theo*: Hai mệnh đề A và B được nối với nhau bởi các liên từ *nếu ... thì* sẽ tạo nên mệnh đề A ⇒ B. A ⇒ B chỉ sai trong trường hợp duy nhất là A đúng và B sai. Nếu A ⇒ B đúng, ta nói B là *hệ quả* của A.

1.3. *Mệnh đề đảo*: B ⇒ A được gọi là *mệnh đề đảo* của mệnh đề A ⇒ B.

Nếu A ⇒ B là mệnh đề đúng, thì B ⇒ A chưa chắc đúng.

Ví dụ: A : "p là số nguyên tố khác 2" ; B : "p có thể viết được dưới dạng 2k + 1, với k là số tự nhiên". Rõ ràng A $\Rightarrow$ B là mệnh đề đúng, nhưng B $\Rightarrow$ A không đúng.

Khi có A $\Rightarrow$ B, ta còn nói A là điều kiện đủ để có B, và B là điều kiện cần để có A.

1.4. *Mệnh đề tương đương*: Khi cả A $\Rightarrow$ B lẫn B $\Rightarrow$ A đều đúng, ta nói A và B là *hai mệnh đề tương đương*, kí hiệu A $\Leftrightarrow$ B. Khi có A $\Leftrightarrow$ B, ta còn nói *Điều kiện cần và đủ* để có A (hoặc B) là có B (hoặc A).

Ví dụ: "ABC là tam giác vuông ở A $\Leftrightarrow$ $HA^2 = HB.HC$". "Điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông ở A là $HA^2 = HB.HC$". Ở đây HA là đường cao của $\triangle ABC$.

1.5. *Mệnh đề chứa biến*: Mệnh đề chứa biến không phải là một mệnh đề, tuy nhiên, trong trường hợp gán cho biến một giá trị cụ thể, ta sẽ được một mệnh đề (đúng hoặc sai).

Ví dụ: $p(n)$ = "2n + 1 là số nguyên tố". $p(n)$ là mệnh đề đúng khi n = 1, 2, 3, 5, 6,...; $p(n)$ là mệnh đề sai khi n = 4, 7, ...

1.6. *Kí hiệu phổ biến*: $\forall$, nghĩa là *với mọi*. *Kí hiệu tồn tại*: $\exists$, nghĩa là *có* hoặc *tồn tại*.

Để chứng minh mệnh đề $\exists x \in X: p(x)$, ta chỉ cần chỉ ra một giá trị x_0 nào đó của X làm cho $p(x_0)$ đúng.

Để chứng minh mệnh đề $\forall x \in X: p(x)$, ta phải chứng tỏ $p(x)$ đúng với bất kì phần tử nào của X.

Để bác bỏ mệnh đề $\exists x \in X: p(x)$ (tức là chứng minh mệnh đề này sai), ta phải chứng minh mệnh đề $\forall x \in X: \overline{p(x)}$ đúng, nghĩa là chứng tỏ $p(x)$ sai với bất kì phần tử nào của X.

Để bác bỏ mệnh đề $\forall x \in X: p(x)$, ta phải chứng minh mệnh đề $\exists x \in X: \overline{p(x)}$ đúng, nghĩa là phải chỉ ra rằng $p(x_0)$ sai với một phần tử x_0 nào đó của X. Việc chỉ ra một phần tử cụ thể như thế để bác bỏ thường được gọi là *nêu lên một phản ví dụ*.

1.7. *Phương pháp chứng minh phản chứng*

Phương pháp chứng minh phản chứng được tiến hành theo các bước như sau:

Bước 1: Ta giả sử rằng kết luận của bài toán là sai và mệnh đề ngược lại của kết luận bài toán là đúng.

Bước 2: Từ mệnh đề ngược lại kết luận của bài toán, ta suy diễn dựa trên giả thiết cho sẵn của bài toán đi đến một khẳng định rõ ràng là sai hoặc mâu thuẫn với giả thiết ban đầu của bài toán. Sau cùng, suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ: Tôi có 13 hộp bi. Tổng số bi trong ba hộp bất kì là một số lẻ. Hỏi tổng số bi trong cả 13 hộp có là một số lẻ không?

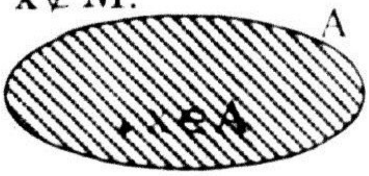
Giải. Giả sử trong 13 hộp bi đã cho tồn tại ít nhất một hộp có số bi là chẵn. Theo đề bài, tổng số bi trong ba hộp bất kì là một số lẻ, do đó, dễ thấy rằng phải có ít nhất hai hộp có số bi trong mỗi hộp là số lẻ. Kết hợp hộp bi chẵn đó với 2 hộp lẻ bất kì ta có tổng số bi của 3 hộp là số chẵn (vì: lẻ + lẻ + chẵn = chẵn). Điều này trái với đề bài là tổng số bi ở 3 hộp bất kì là một số lẻ. Vậy điều giả sử của chúng ta là sai. Như vậy tất cả 13 hộp bi đều có số lẻ các viên bi trong mỗi hộp. Suy ra tổng số bi trong 13 hộp là một số lẻ.

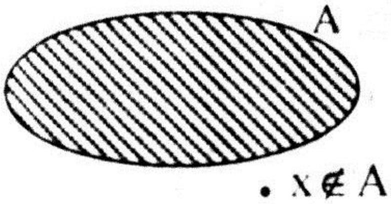
§ 2. TẬP HỢP

2.1. Tập hợp là khái niệm cơ bản của Toán học. Ví dụ, tập hợp các em học sinh của một lớp học, tập hợp các số tự nhiên, tập hợp các hình tứ giác...

Người ta thường biểu diễn một tập hợp

A như một phần mặt phẳng được giới hạn bởi một đường cong khép kín. Mỗi phần tử x của tập M được kí hiệu bởi $x \in M$ và được biểu diễn như một điểm trong phần mặt phẳng được giới hạn đó. Khi x không phải là phần tử của tập hợp M thì ta viết $x \notin M$.





2.2. *Có hai cách để xác định tập hợp:*

(1) Phương pháp *liệt kê các phần tử.*

a) Liệt kê tất cả các phần tử của tập hữu hạn: Ví dụ, tập hợp tất cả các số tự nhiên bé hơn 12:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}.$$

b) Liệt kê tượng trưng và suy diễn:

Ví dụ: Tập hợp tất cả các số tự nhiên chẵn: $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Tập số nguyên:

$$Z = \{\ldots , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

(2) Phương pháp *chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.*

Chẳng hạn, để biểu diễn tập hợp tất cả các số chính phương, ta có thể viết: $M=\{n^2 : \in N\}$, hay $M = \{n \in N$: n là số chính phương$\}$.

Tập hợp tất cả các số thực trên mặt

phẳng tọa độ Đề-các: $\{(x, y): x, y \in R\}$.

2.3. Một tập hợp có thể có một phần tử, có nhiều phần tử, có vô số phần tử, cũng có thể không có phần tử nào. Tập hợp không có phần tử nào gọi là tập hợp rỗng. Tập hợp rỗng được kí hiệu là $\varnothing$.

2.4. Nếu mọi phần tử của tập hợp A điều thuộc tập hợp B thì A gọi là tập hợp con của tập hợp B. Kí hiệu $A \subset B$, đọc là: A là tập hợp con của tập hợp B, hoặc A được chứa trong B, hoặc B chứa A. Chẳng hạn, tập hợp các số tự nhiên là một tập con của tập hợp các số hữu tỉ, tập hợp các số hữu tỉ là tập con của tập hợp các số thực. Tập rỗng là tập con của tất cả các tập hợp.

Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì ta nói rằng A và B là hai tập hợp bằng nhau, kí hiệu

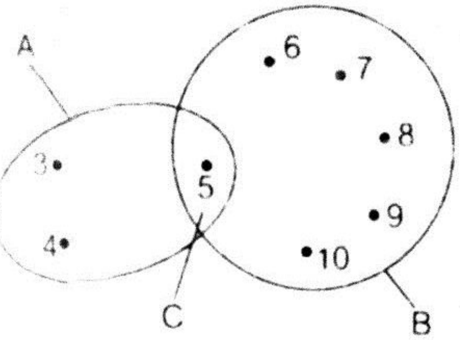
$$A = B.$$

Ví dụ: Tập hợp tất cả các tập con của tập hợp $\{1, 2, 3\}$ là $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$,

$$\{1, 3\}, \{2, 3\} \text{ và } \{1, 2, 3\}.$$

Chú ý. Nếu một tập hợp có n phần tử thì nó có tất cả 2^n tập hợp con.

2.5. * ***Giao*** của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cap B$, là tập hợp gồm các phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B.



$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$. Chẳng hạn, trong hình bên, ta có

$$C = \{5\} = \{3, 4, 5\} \cap \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

* ***Hợp*** của hai tập hợp A và B là một tập hợp được tạo thành bởi các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp đó, kí hiệu là $A \cup B$. Nói cách khác:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

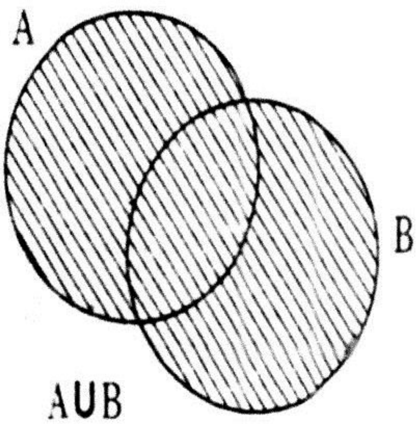
Chẳng hạn, với $A = \{a, b, c\}$; $B = \{b, c, d, e\}$, ta có $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$.

* ***Hiệu*** của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm các phần tử thuộc A mà không thuộc B, kí hiệu: $A \setminus B$. Nói cách khác:

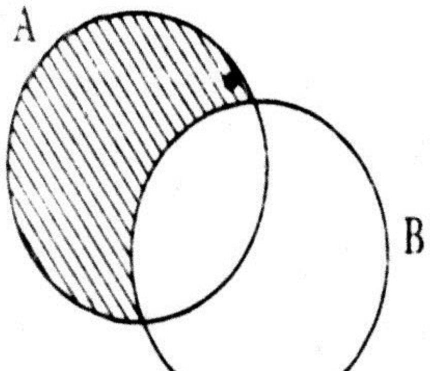
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

Chẳng hạn, với $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ta có:

$$A \setminus B = \{2, 4, 6, 8\}.$$



AUB



A\B

* Đặc biệt, khi $B \subset A$, ta nói $A \setminus B$ là *phần bù* của B trong A, kí hiệu $C_A(B)$.

2.6. Ta đã biết các tập hợp số tự nhiên ($\mathbf{N}$), số nguyên ($\mathbf{Z}$), số hữu tỉ ($\mathbf{Q}$) và số thực $\mathbf{R}$. Phần bù $C_{\mathbf{R}}(\mathbf{Q})$ là tập các số vô tỉ.

2.7. *Một số tập con thường gặp của* **R**.

* Khoảng $(a ; b) = \{ x \in \mathbf{R} \mid a < x < b \}$

$(a ; +\infty) = \{ x \in \mathbf{R} \mid a < x \}$

$(-\infty ; b) = \{ x \in \mathbf{R} \mid x < b \}$

* Đoạn $[a ; b] = \{ x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b \}$

* Nửa khoảng

$[a ; b) = \{ x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b \}$

$(a ; b] = \{ x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b \}$

$[a ; +\infty) = \{ x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \}$

$(-\infty ; b] = \{ x \in \mathbf{R} \mid x \leq b \}$

Kí hiệu: $\mathbf{R}_+ = [0 ; +\infty)$, $\mathbf{R}_- = (-\infty ; 0)$,

$\mathbf{R}^* = \{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0 \}$.

Ví dụ: a) Cho $A = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$;

$B = \{ 2, 3, 4, 5, 6 \}$.

Ta có: $A \setminus B = \{ 0, 1 \}$; $B \setminus A = \{5, 6 \}$;

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{ 0, 1, 5, 6 \}$;

$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$.

b) Cho $A = [1, 4]$; $B = (2, 6)$; $C = (1, 2)$.

Ta có $A \cap B = (2, 4]$; $A \cap B \cap C = \varnothing$.

c) Cho $A = (-\infty, -1]$; $B = [-1, +\infty)$;

$$C = \{-2, -1\}.$$

Ta có $A \cup B \cup C = \mathbf{R}$; $A \cap B \cap C = \{-1\}$.

§ 3. SỐ GẦN ĐÚNG - SAI SỐ

Trong đo đạc và tính toán, ta thường chỉ nhận được những số *gần đúng*.

3.1. Nếu a là số gần đúng của $\overline{a}$ thì

$$\Delta_a = |\overline{a} - a|$$

được gọi là *sai số tuyệt đối* của số gần đúng a. Nếu $\Delta_a = |\overline{a} - a| \leq h$, ta nói h là một *cận trên* của sai số tuyệt đối của a, và a là số gần đúng của $\overline{a}$ với *độ chính xác* h. Lúc đó, $a - h \leq \overline{a} \leq a + h$.

3.2. Tỉ số $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{|\overline{a} - a|}{|a|}$ được gọi là *sai số tương đối* của số gần đúng a.

Sai số tương đối thường được biểu thị dưới dạng phần trăm.

3.3. *Chữ số chắc:* Chữ số k của số gần đúng a được gọi là *chữ số đáng tin* (hay *chữ số chắc*) nếu sai số tuyệt đối Δ_a không vượt quá một đơn vị của hàng có chữ số k đó.

Nếu k là chữ số đáng tin thì tất cả các chữ số đứng bên trái của nó cũng đáng tin.

Viết chuẩn một số gần đúng là làm tròn số gần đúng này đến chữ số đáng tin cuối cùng bên trái.

Ví dụ: Xét số gần đúng a = 28416775. Số này có $\Delta_a = 300$ (tức là sai số không vượt quá 300). Trong *cách viết chuẩn*, ta viết a = 2842000.

3.4. *Các phép toán về số gần đúng*

Nếu a, b là hai số gần đúng với sai số tuyệt đối tương ứng là Δ_a và Δ_b thì a + b, a – b là những số gần đúng với sai số tuyệt đối không vượt quá $\Delta_a + \Delta_b$.

Nếu a, b là hai số gần đúng với sai số tương đối tương ứng là δ_a và δ_b thì sai số tương đối của a.b và $\frac{a}{b}$ không vượt quá

$$\delta_a + \delta_b.$$

§ 4. KIẾN THỨC CẦN NHỚ KHÁC

4.1. *Quy luật phản đảo:* Nếu $A \Rightarrow B$ là mệnh đề đúng thì $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ cũng là mệnh đề đúng.

Ví dụ: Nếu p là số nguyên tố thì p không chia hết cho bất cứ số nào ngoài 1 và chính nó. *Phản đảo:* Nếu p chia hết cho một số khác 1 và chính nó thì p không phải là số nguyên tố.

4.2. Cho trước hai tập hợp hữu hạn A và B. Khi đó, tổng số phần tử của $A \cap B$ và $A \cup B$ bằng tổng số phần tử của A và B.

4.3. *Nguyên tắc Dirichlet tổng quát:*

Nếu $k, n \in \mathbf{N}^*$ và $kn + 1$ phần tử được chia vào n tập hợp, thì tồn tại ít nhất một tập hợp chứa $k + 1$ phần tử.

Ví dụ: Có 30 học sinh trong một lớp học. Khi làm bài trắc nghiệm, có 1 học sinh phạm 12 lỗi, các học sinh khác bị ít lỗi hơn. Chứng minh rằng có ít nhất 3 học sinh có cùng số lỗi.

Giải. Mỗi học sinh trong lớp có thể phạm 0, 1, 2, ..., 11 lỗi. Bây giờ ta xây dựng 12 tập hợp, các tập này mang tên tượng trưng là: tập 0 lỗi, tập 1 lỗi, ..., tập 11 lỗi. Ta có $29 > 2.12$. Do đó, theo nguyên tắc Dirichlet tổng quát, có ít nhất $2 + 1 = 3$ học sinh có cùng một số lỗi.

4.4. *Nguyên lí thứ tự tốt:* Giả sử A là tập con khác rỗng của tập các số nguyên dương. Lúc đó, A chứa một phần tử bé nhất. Nguyên lí này còn được gọi là *Tiên đề thứ tự*.

4.5. *Nguyên lí quy nạp:* Giả sử Q là tập hợp con của tập các số nguyên sao cho

(a) $k \in Q$;

(b) $n \in Q$ suy ra $(n + 1) \in Q$ với mọi $n \geq k$.

Lúc đó ta có

Mọi số nguyên lớn hơn hoặc bằng k đều thuộc Q.

Chương 2

HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

---

§ 1. HÀM SỐ

1.1. *Khái niệm hàm số*

Cho D là một tập con khác rỗng của tập hợp các số thực **R**. Một *hàm số* f xác định trên D là một quy tắc cho ứng với mỗi phần tử $x \in D$ một và chỉ một số thực y.

D được gọi là *tập xác định* (hay miền xác định) của hàm số f. Phần tử bất kì $x \in D$ được gọi là *biến số độc lập* (hay *biến số*, hay *đối số*). Số thực y tương ứng với biến số x được gọi là *giá trị* của hàm số f tại x, kí hiệu là f(x). Ta viết

$$\begin{aligned} f:\ & D \to \mathbf{R} \\ & x \mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Ta gọi công thức $y = f(x)$ là *quy tắc tìm giá trị* f(x) của hàm số f tại mọi $x \in D$.

Như vậy: Một hàm số được xác định nếu ta biết tập xác định D và quy tắc tìm giá trị y = f(x) của hàm số.

1.2. *Hàm số cho bằng biểu thức*

Người ta thường cho hàm số f bởi công thức: $y = f(x)$, trong đó $f(x)$ là một biểu thức chứa x. Hàm số f được cho bởi công thức $y = f(x)$ được gọi tắt là *hàm số* $y = f(x)$ hay đôi khi, để cho tiện, ta cũng nói *hàm số* $f(x)$. Với cách cho này, người ta thường không chỉ rõ tập xác định của hàm số. Khi đó ta quy ước:

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Ví dụ: Cho hàm số $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q}$, cho bởi $f(x) = 5x$. Tìm x để $f(x) = 1$.

Có thể có học sinh lầm tưởng rằng giá trị x để $f(x) = 1$ là $x = \frac{1}{5}$. Tuy nhiên, do tập xác định là tập số nguyên (Z), nên kết luận ở đây là *không có giá trị x nào để* $f(x) = 1$.

* *Các trường hợp thường gặp:*

- $y = \dfrac{1}{u(x)}$ xác định khi $u(x) \neq 0$.
- $y = \sqrt{u(x)}$ xác định khi $u(x) \geq 0$.

- $y = \dfrac{1}{\sqrt{u(x)}}$ xác định khi $u(x) > 0$.

Ví dụ: Tìm tập xác định của hàm số

$$y = \frac{5x+3}{|x^2-4|+|x^2-3x+2|}.$$

Giải.

$$|x^2-4|+|x^2-3x+2| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4=0 \\ x^2-3x+2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ x=1 \vee x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D = \mathbf{R} \setminus \{2\}.$$

1.3. *Đồ thị của hàm số*

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D. *Đồ thị* của hàm số là tập hợp tất cả các điểm $M(x ; y)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy với $x \in D$ và $y = f(x)$.

Công thức $y = f(x)$ được gọi là phương trình của đồ thị.

Để vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$, về nguyên tắc ta phải xác định tất cả các điểm $(x ; y)$ trong mặt phẳng Oxy, sao cho $y = f(x)$ với $x \in D$. Trong đa số trường hợp, điều này không thể thực hiện được vì có vô số điểm như thế. Vì vậy ta chỉ có thể vẽ được đồ thị một cách gần đúng bằng cách xác định một số điểm của nó rồi nối chúng lại thành một đường. Sau này, việc khảo sát kĩ hơn các dáng điệu đồ thị một số loại hàm số (ở lớp trên) sẽ cho ta cách vẽ tương đối chính xác.

1.4. *Sự biến thiên của hàm số*

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; b)$.

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *đồng biến* (hay *tăng*) trên khoảng $(a;b)$ nếu với mọi số thực x_1 và x_2 thuộc $(a ; b)$ ta có :

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *nghịch biến* (hay *giảm*) trên khoảng $(a;b)$ nếu với mọi số thực x_1 và x_2 thuộc $(a ; b)$ ta có :

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$$

- *Khảo sát sự biến thiên* của hàm số trên khoảng $(a ; b)$ là xét xem hàm số đó đồng biến hay nghịch biến trên khoảng này. Để khảo sát sự biến thiên của hàm số trên khoảng $(a ; b)$, ta thực hiện :

* Lập tỉ số

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

với $x_1, x_2 \in (a; b)$ và $x_1 \neq x_2$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/1511

* Nếu $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ với mọi $x_1, x_2 \in$ (a ; b), $x_1 \neq x_2$ thì hàm số y = f(x) đồng biến trên (a ; b).

* Nếu $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$ với mọi $x_1, x_2 \in$ (a ; b), $x_1 \neq x_2$ thì hàm số y = f(x) nghịch biến trên (a ; b).

Ví dụ: Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = x^2 + 2x - 2$ trên mỗi khoảng

$$(-\infty ; -1) \text{ và } (-1 ; +\infty).$$

Giải. $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} =$

$$= \frac{(x_2^2+2x_2-2)-(x_1^2+2x_1-2)}{x_2-x_1} = x_1+x_2+2.$$

Trên khoảng $(-\infty ; -1)$, ta có

$$x_1 < -1,\ x_2 < -1,$$

do đó $x_1 + x_2 + 2 < 0$ nên suy ra hàm số nghịch biến. Tương tự, trên $(-1 ; +\infty)$, ta có $x_1 + x_2 + 2 > 0$ nên suy ra hàm số đồng biến.

1.5. *Bảng biến thiên*: Ta thường biểu diễn sự biến thiên của hàm số dưới dạng bảng, gọi là *bảng biến thiên* của hàm số. Trong bảng này, mũi tên đi lên chỉ sự đồng biến, mũi tên đi xuống chỉ sự nghịch biến. Chẳng hạn :

x	a		b		c
y		↗		↘	

(Hàm số đồng biến trên (a ; b), nghịch biến trên (b ; c)).

1.6. *Tính chẵn, lẻ*

Cho hàm số y = f(x) xác định trên D.

• Hàm số y = f(x) được gọi là ***chẵn*** trên D nếu với mọi x ∈ D ta có : –x ∈ D và

$$f(-x) = f(x).$$

• Hàm số y = f(x) được gọi là ***lẻ*** trên D nếu với mọi x ∈ D ta có : –x ∈ D và

$$f(-x) = -f(x).$$

Chú ý. Một tập D có tính chất "nếu x ∈ D thì –x ∈ D" được gọi là *tập đối xứng qua* 0 (hay để cho gọn, ta gọi là *tập đối xứng*).

Định lí. Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng. Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

§ 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

2.1. Hàm số bậc nhất được cho bởi công thức $y = ax + b$, trong đó a, b là các hằng số và $a \neq 0$.

2.2. Hàm số $y = f(x) = ax + b$ đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$.

2.3. *Đồ thị của hàm số bậc nhất*

Đồ thị của hàm bậc nhất $y = ax + b$ là đường thẳng đi qua hai điểm. Để vẽ đồ thị hàm số này, ta cần xác định hai điểm nó đi qua. Hai điểm đó chọn theo cách thuận tiện nhất trong tính toán và dễ vẽ nhất. Cho $x = 0$, ta được $y = b$; cho $y = 0$ ta được $x = -\left(\frac{b}{a}\right)$. Vậy đồ thị hàm số đi qua hai điểm $A(0 ; b)$ và $B\left(-\frac{b}{a};0\right)$. Tuy nhiên, không nhất thiết phải chọn hai điểm trên trục tung và trên trục hoành như thế, nếu như có cách chọn khác tốt hơn.

Chú ý. a) Khi $b = 0$, hàm số $y = ax$ có đồ thị là đường thẳng đi qua gốc toạ độ. Để vẽ đường thẳng này, dĩ nhiên, chỉ cần chọn thêm một điểm nữa.

b) Đồ thị hàm $y = ax + b$ cũng còn được gọi là *đường thẳng* $y = ax + b$. Số a được gọi là ***hệ số góc*** của đường thẳng.

2.4. *Sự tương giao:* Xét hai đường thẳng

$y = ax + b$ và $y = cx + d$:

* Nếu $a \neq c$: hai đường thẳng đó cắt nhau tại một điểm.

* Nếu $a = c$: Khi $b \neq d$, hai đường thẳng song song nhau. Khi $b = d$, hai đường thẳng trùng nhau.

Ví dụ: Xét xem ba đường thẳng sau có đồng quy hay không: (1) $y = x + \sqrt{29}$; (2) $y = \sqrt{3}x - \sqrt{29}$; (3) $y = x + \sqrt{32} - 17$.

Giải. Hệ số góc của hai đường thẳng (1) và (3) bằng nhau (và bằng 1), trong khi đó, hệ số b của hai đường thẳng này khác nhau. Như vậy, hai đường thẳng (1) và (3) song song nhau. Do đó, ba đường thẳng đã cho không đồng quy.

2.5. *Đồ thị hàm* $y = |ax + b|$, *với* $a \neq 0$

$$y = |ax + b| = \begin{cases} -ax - b & \text{khi } x \leq -\dfrac{b}{a} \\ ax + b & \text{khi } x > -\dfrac{b}{a} \end{cases}.$$

Đồ thị phải vẽ là sự lắp ghép của hai nửa đường thẳng, hai nửa đường thẳng này đối xứng qua đường thẳng $x = -\dfrac{b}{a}$.

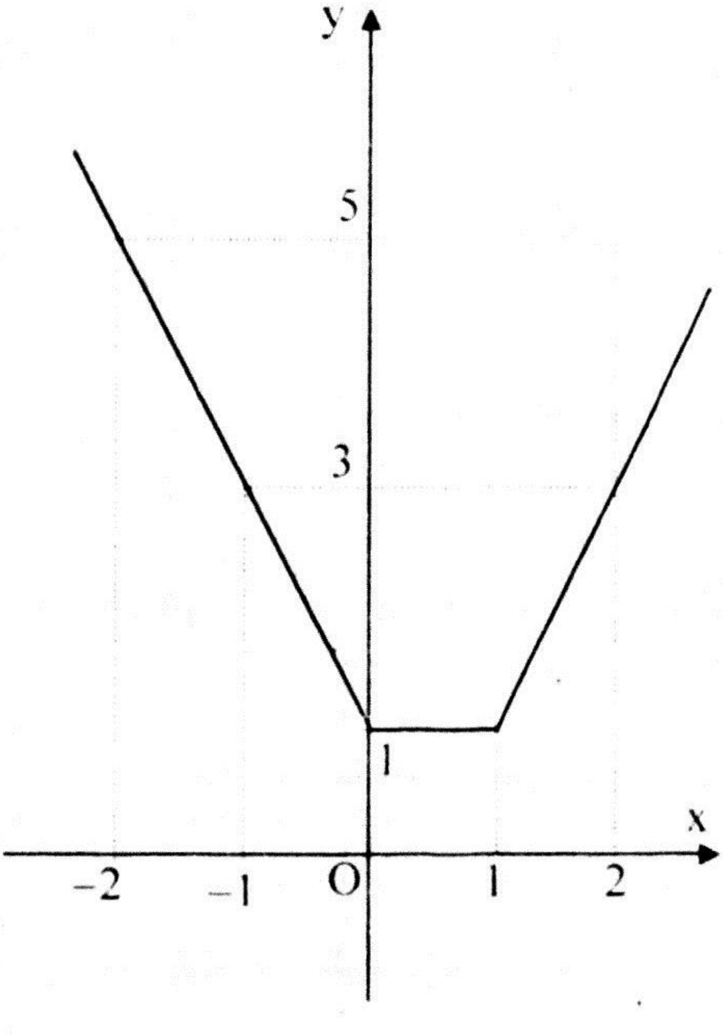
Ví dụ: Vẽ đồ thị hàm số

$$y = |x| + |x - 1|.$$

Giải. Ta có $y = \begin{cases} -2x+1 & \text{nếu } x \le 0 \\ 1 & \text{nếu } 0 < x < 1. \\ 2x-1 & \text{nếu } x \ge 1 \end{cases}$

Để vẽ đồ thị hàm số này, ta thực hiện như sau: Vẽ nửa đường thẳng y = –2x+1 (chỉ lấy phần ứng với x ≤ 0), vẽ đường thẳng nằm ngang y =1, nhưng chỉ lấy đoạn thẳng khi x đi từ 0 đến 1, và vẽ nửa đường thẳng y = 2x – 1 (chỉ lấy phần ứng với x > 1).

Đồ thị phải vẽ là sự lắp ghép của hai nửa đường thẳng và đoạn thẳng nói trên.



§ 3. HÀM SỐ BẬC HAI

3.1. Hàm số bậc hai là hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$. Nó có tập xác định là **R**.

3.2. Xét số $a > 0$. Trong mặt phẳng tọa độ, cho điểm $M(x_0; y_0)$. Khi tịnh tiến điểm $M(x_0; y_0)$ song song trục tung và lên trên (tức là dịch chuyển theo phương song song trục tung về phía trên) lên a đơn vị, điểm M trở thành điểm $M_1(x_0; y_0 + a)$. Khi tịnh tiến điểm $M(x_0, y_0)$ song song trục tung và xuống dưới a đơn vị, điểm M trở thành điểm $M_2(x_0, y_0 - a)$.

Khi tịnh tiến điểm $M(x_0; y_0)$ song song trục hoành và sang phải a đơn vị, điểm M trở thành điểm $M_3(x_0 + a; y_0)$. Tương tự, sang trái, M biến thành điểm $M_4(x_0 - a; y_0)$.

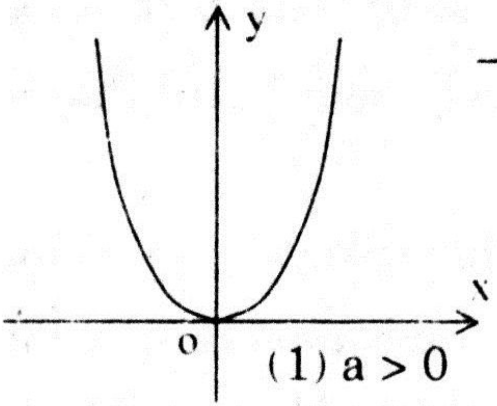
Tịnh tiến một đồ thị (sang phải, trái, lên hoặc xuống k đơn vị) là tịnh tiến toàn bộ các điểm của đồ thị đó (sang phải, trái, lên hoặc xuống k đơn vị).

Định lí. Trong mặt phẳng tọa độ, cho (G) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Gọi p, q là hai số tùy ý. Khi đó :

a) Để có đồ thị hàm số $y = f(x) + q$, ta tịnh tiến (G) lên trên q đơn vị nếu $q > 0$, hoặc tịnh tiến (G) xuống dưới $|q|$ đơn vị trong trường hợp $q < 0$.

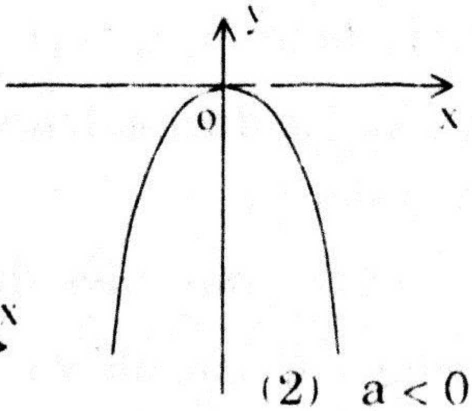
b) Để có đồ thị hàm số $y = f(x - p)$, ta tịnh tiến (G) sang phải p đơn vị nếu $p > 0$, hoặc tịnh tiến (G) sang trái $|p|$ đơn vị trong trường hợp $p < 0$.

3.3. Đồ thị hàm số $y = ax^2$ là parabol có đỉnh tại O, nhận Oy làm trục đối xứng.



(1) $a > 0$

quay bề lõm lên trên



(2) $a < 0$

quay bề lõm xuống dưới

3.4. Đối với hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ta luôn có thể biến đổi về dạng :

$$y = a(x - p)^2 + q,$$

trong đó, $p = -\dfrac{b}{2a}$; $q = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Do vậy, nếu gọi (P_0) là đồ thị của hàm số $y = ax^2$ và (P) là đồ thị của hàm số

$$y = ax^2 + bx + c$$

thì để có (P), ta tịnh tiến (P_0) hai lần như sau:

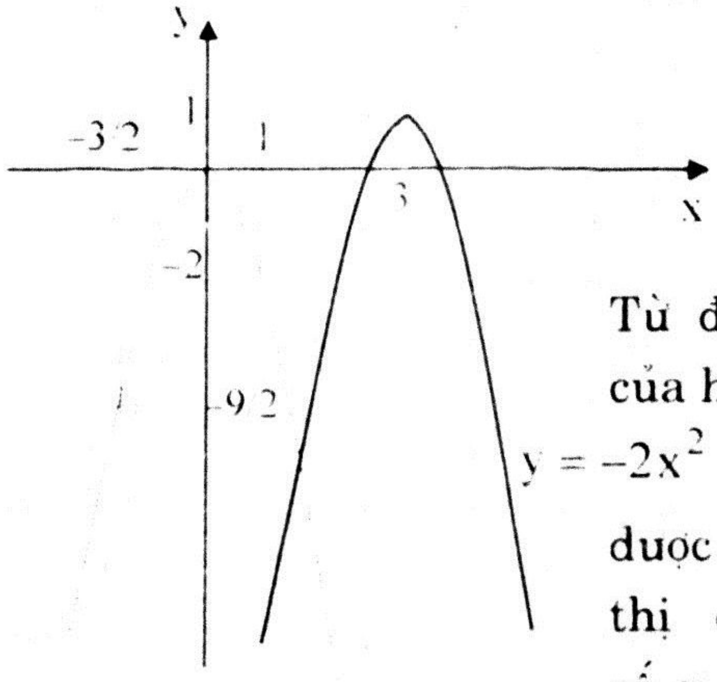
a) Lần (1), tịnh tiến (P_0) sang phải p đơn vị nếu $p > 0$, hoặc tịnh tiến (P_0) sang trái $|p|$ đơn vị trong trường hợp $p < 0$. Lúc đó, ta được đồ thị (P_1).

b) Lần (2), tịnh tiến (P_1) lên trên q đơn vị nếu $q > 0$, hoặc tịnh tiến (P_0) xuống dưới $|q|$ đơn vị trong trường hợp $q < 0$. Đồ thị sau cùng này chính là (P).

Ví dụ: Vẽ đồ thị $y = -2x^2 + 12x - 17$.

Giải. Biến đổi:

$y = -2x^2 + 12x - 17 = -2(x-3)^2 + 1$.



Từ đó, đồ thị của hàm số $y = -2x^2 + 12x - 17$ được suy từ đồ thị của hàm số $y = -2x^2$ như hình vẽ (tịnh tiến sang phải 3 đơn vị, sau đó, lên trên 1 đơn vị).

3.5. Như vậy: Đồ thị (P) của hàm số

$$y = ax^2 + bx + c$$

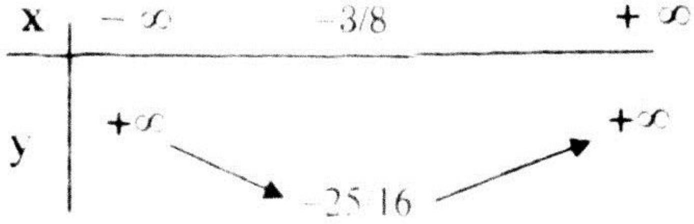
là một parabol có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng, hướng bề lõm lên trên khi $a > 0$ và xuống dưới khi $a < 0$. Bây giờ, sau khi đã biết rằng đồ thị (P) của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ là một parabol như trên, để vẽ nó, ta thực hiện như sau :

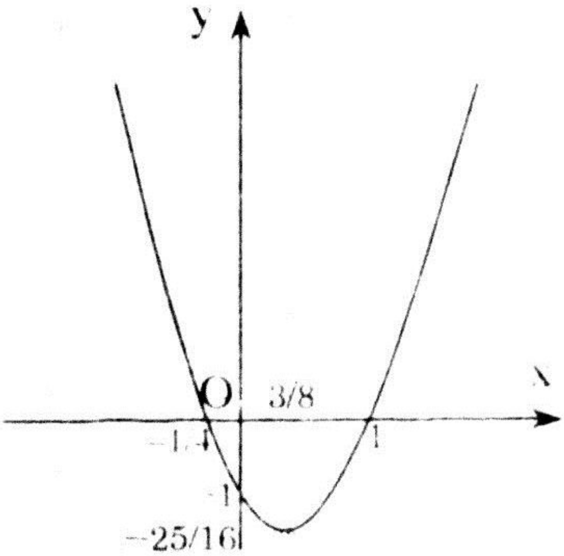
- Xác định đỉnh của (P).
- Xác định trục đối xứng và hướng bề lõm của (P).
- Để đồ thị thêm phần chính xác, ta xác định thêm một số điểm cụ thể (chẳng hạn, giao điểm của (P) và các trục tọa độ, các điểm đối xứng với chúng qua trục đối xứng).

Ví dụ: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

$$y = 4x^2 - 3x - 1.$$

Giải. Ta có $-\frac{b}{2a} = \frac{3}{8}$, $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{25}{16}$. Đồ thị của hàm số là parabol có đỉnh $I\left(\frac{3}{8}; \frac{-25}{16}\right)$, nhận đường thẳng $x = \frac{3}{8}$ làm trục đối xứng, bề lõm hướng lên trên (vì $a = 4 > 0$). Bảng biến thiên :





Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ $-\frac{1}{4}$ và 1 ; cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng −1.

Chương 3

PHƯƠNG TRÌNH
HỆ PHƯƠNG TRÌNH

---

§ 1. PHƯƠNG TRÌNH

1.1. Một phương trình ẩn x là một phương trình có dạng $F(x) = G(x)$, trong đó, $F(x)$ và $G(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x.

Ngoài các điều kiện để F(x) và G(x) có nghĩa, có khi x còn phải thỏa mãn thêm những điều kiện khác. Ta gọi chung các điều kiện ấy là điều kiện xác định (ĐKXĐ).

Nghiệm của một phương trình là một giá trị của ẩn x thỏa mãn ĐKXĐ mà khi thay vào sẽ làm thỏa mãn phương trình đó (nói cách khác, x thỏa mãn ĐKXĐ và làm cho mệnh đề chứa biến F(x) = G(x) trở thành mệnh đề đúng).

1.2. *Giải một phương trình* có nghĩa là tìm tất cả các nghiệm của phương trình đó. Tập hợp tất cả các nghiệm của một phương trình được gọi là *tập nghiệm* của phương trình đó, thường được kí hiệu bằng chữ T hoặc S.

1.3. Hai phương trình có cùng một tập nghiệm được gọi là *hai phương trình tương đương*. Để biểu thị hai phương trình tương đương, ta dùng kí hiệu " ⇔ ".

Ví dụ: $12x^2 = 6x \Leftrightarrow 12x = 6$.

Trong trường hợp này, nếu không nói gì trước đó thì viết như vậy là sai, vì phương trình thứ nhất có tập nghiệm là

$$\left\{0 \cdot \frac{1}{2}\right\},$$

còn tập nghiệm của phương trình thứ hai là $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

1.4. *Quy tắc chuyển vế:*

$$f(x)+g(x)=h(x) \Leftrightarrow f(x)=h(x)-g(x).$$

Quy tắc rút gọn:

$$f(x)+h(x)=g(x)+h(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x).$$

(Trong ĐKXĐ của phương trình ban đầu).

1.5. Giả sử phương trình $f_1(x)=g_1(x)$ có tập nghiệm T_1 và phương trình

$$f_2(x)=g_2(x)$$

có tập nghiệm T_2. Nếu $T_2 \subset T_1$, ta nói

$$f_2(x)=g_2(x)$$

là *phương trình hệ quả* của $f_1(x)=g_1(x)$, và viết: $f_1(x)=g_1(x) \Rightarrow f_2(x)=g_2(x)$.

Chú ý: Khi bình phương hai vế của một phương trình, ta được phương trình hệ quả của phương trình đã cho. Khi cả hai vế đều dương, phương trình hệ quả này trở thành phương trình tương đương.

1.6. Ta còn gặp phương trình chứa nhiều hơn một ẩn số, chẳng hạn, phương trình với 3 ẩn x, y, z: $x^3+2xy+z=5x$.

Ngoài ẩn số, phương trình có thể còn

chứa các *tham số*, tức là chứa thêm các chữ, tuy các chữ này không phải là ẩn, nhưng những giá trị khác nhau của tham số có thể làm thay đổi tính chất của phương trình. Chẳng hạn, phương trình $mx = 5$ có nghiệm khi $m \neq 0$ nhưng vô nghiệm khi $m = 0$.

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

2.1. *Phương trình bậc nhất một ẩn* là phương trình có dạng $ax + b = 0$, trong đó a và b là những biểu thức không chứa x.

2.2. *Giải và biện luận* phương trình dạng

$$ax + b = 0.$$

1) Nếu $a \neq 0$ ta có: $x = -\dfrac{b}{a}$.

2) Nếu $a = 0$. Phương trình $ax + b = 0$ trở thành: $0x = b$.

α) Nếu $b \neq 0$ ta có $0x \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

β) Nếu $b = 0$ ta có $0x = 0$, phương trình vô định (Phương trình có nghiệm là mọi giá trị của x).

Ví dụ: Giải và biện luận phương trình: $\dfrac{m(x-1)}{3} - \dfrac{2(x+m)}{5} = \dfrac{x+2}{15}$.

Giải. Phương trình đã cho được viết lại thành:

$$5m(x - 1) - 6(x + m) = x + 2$$

$$5mx - 5m - 6x - 6m = x + 2$$

$$(5m - 7)x = 11m + 2. \qquad (1)$$

Biện luận:

1) Nếu $5m - 7 \neq 0$, hay $m \neq \frac{7}{5}$, ta có:

$$x = \frac{11m + 2}{5m - 7}.$$

2) Nếu $5m - 7 = 0$ hay $m = \frac{7}{5}$, phương trình (1) trở thành: $0x = 11.\frac{7}{5} + 2 = \frac{87}{5}$, phương trình này vô nghiệm.

2.3. *Phương trình đưa được về dạng ax + b*

2.3.1. *Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức*

Ví dụ: Tùy theo m, n, hãy giải phương trình: $\frac{2n - 1}{x - 1} = m - 2$.

Giải. Với điều kiện $x \neq 1$, ta biến đổi phương trình thành $(m - 2)x = 2n + m - 3$.

Khi đó:

* Nếu $m \neq 2$, phương trình có một nghiệm là $x = \frac{2n + m - 3}{m - 2}$.

* Nếu $m = 2$, phương trình có dạng $0x = 2n - 1$. Lúc đó:

Nếu $n = \frac{1}{2}$, có mọi x đều là nghiệm của phương trình. Nếu $n \neq \frac{1}{2}$, phương trình vô nghiệm.

2.3.2. *Phương trình tích*

Ví dụ: Giải và biện luận phương trình:

$$(a^2 - b^2)(x^2 + 1) = 2(a^2 + b^2)x. \qquad (1)$$

Giải. Ta nhận thấy:

- Nếu $a^2 = b^2 \neq 0$ phương trình cho nghiệm duy nhất $x = 0$.

- Nếu $a^2 = b^2 = 0$, phương trình vô định (mọi x đều là nghiệm).

Bây giờ, xét trường hợp còn lại, giả sử $a^2 - b^2 \neq 0$, hay $a \neq \pm b$. Ta có thể viết:

$$a^2(x^2 + 1) - 2a^2x - b^2(x^2 + 1) - 2b^2x = 0$$

$$a^2(x - 1)^2 - b^2(x + 1)^2 = 0$$

$$[a(x - 1) + b(x + 1)][a(x - 1) - b(x + 1)] = 0$$

$$[(a + b)x - (a - b)][(a - b)x - (a + b)] = 0. \quad (2)$$

Nghiệm số của (2) là nghiệm số của:

$$(a + b)x - (a - b) = 0, \qquad (3)$$

hoặc của $(a - b)x - (a + b) = 0$. (4)

Vì giả thiết $a \neq \pm b$ nên (3) và (4) lần lượt cho ta: $x = \frac{a - b}{a + b}$; $x = \frac{a + b}{a - b}$.

Tóm lại:

– Nếu $a^2 \neq b^2$ ta có hai nghiệm:

$$x = \frac{a-b}{a+b} \text{ và } x = \frac{a+b}{a-b}.$$

– Nếu $a^2 = b^2 \neq 0$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 0$.

– Nếu $a^2 = b^2 = 0$, phương trình (1) vô định.

2.3.3. *Phương trình bậc nhất chứa giá trị tuyệt đối*

* Nhắc lại định nghĩa giá trị tuyệt đối:

$$|A| = \begin{cases} A & \text{khi} \quad A \geq 0 \\ -A & \text{khi} \quad A < 0 \end{cases}.$$

* Phương trình dạng $|ax + b| = |cx + d|$ tương đương với $\left[\begin{array}{l} ax + b = cx + d \\ ax + b = -(cx + d) \end{array}\right.$.

Ví dụ : Giải phương trình

$$\frac{|x+3|}{4} - \frac{|x-4|}{9} = \frac{1}{2} - \frac{x+5}{36}. \qquad (1)$$

Giải. * Nếu $x < -3$, ta có $x + 3 < 0$ và $x - 4 < 0$ nên (1) trở thành

$$-\frac{x+3}{4} + \frac{x-4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{x+5}{36}.$$

Giải ra, ta được $x = -14$, thoả mãn điều kiện.

* Nếu $-3 \leq x \leq 4$, ta có $x + 3 \geq 0$ và $x - 4 \leq 0$ nên (1) trở thành

$$\frac{x+3}{4}+\frac{x-4}{9}=\frac{1}{2}-\frac{x+5}{36}.$$

Giải ra, ta được $x = \frac{1}{7}$, thoả mãn điều kiện.

* Nếu $x > 4$, ta có $x + 3 > 0$ và $x - 4 > 0$ nên (1) trở thành $\frac{x+3}{4}-\frac{x-4}{9}=\frac{1}{2}-\frac{x+5}{36}$.

Ta được $x = -5$, loại vì không thoả mãn điều kiện.

Tóm lại, phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = -14$ và $x_2 = \frac{1}{7}$.

§ 3. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

3.1. *Phương trình bậc nhất hai ẩn*

Phương trình bậc nhất hai ẩn là phương trình có dạng

$$ax + by = c, \qquad (1)$$

trong đó a, b, c là các số đã biết, với $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$ (tức là $a^2 + b^2 \neq 0$) và x, y là các ẩn. Cặp số $(x_0 ; y_0)$ được gọi là nghiệm của phương trình (1) nếu khi thay $x = x_0$, $y = y_0$ vào (1) thì giá trị của vế trái bằng giá trị vế phải. Phương trình (1) luôn luôn có vô số nghiệm.

Từ (1) có thể viết:

* Nếu $b \neq 0$: $y = Ax + B$

$$\left(\text{với } A = -\frac{a}{b};\ B = \frac{c}{b}\right);$$

* Nếu $b = 0$: $x = \frac{c}{a}$.

Như vậy, các điểm $(x\ ;\ y)$ thoả mãn (1) được biểu diễn hình học bằng một đường thẳng.

3.2. *Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn*

3.2.1. Một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$, trong đó, (1) và (2) là hai phương trình bậc nhất hai ẩn. Nếu hai phương trình này có nghiệm chung thì nghiệm chung đó được gọi là *nghiệm của hệ*.

Giải một hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm của hệ.

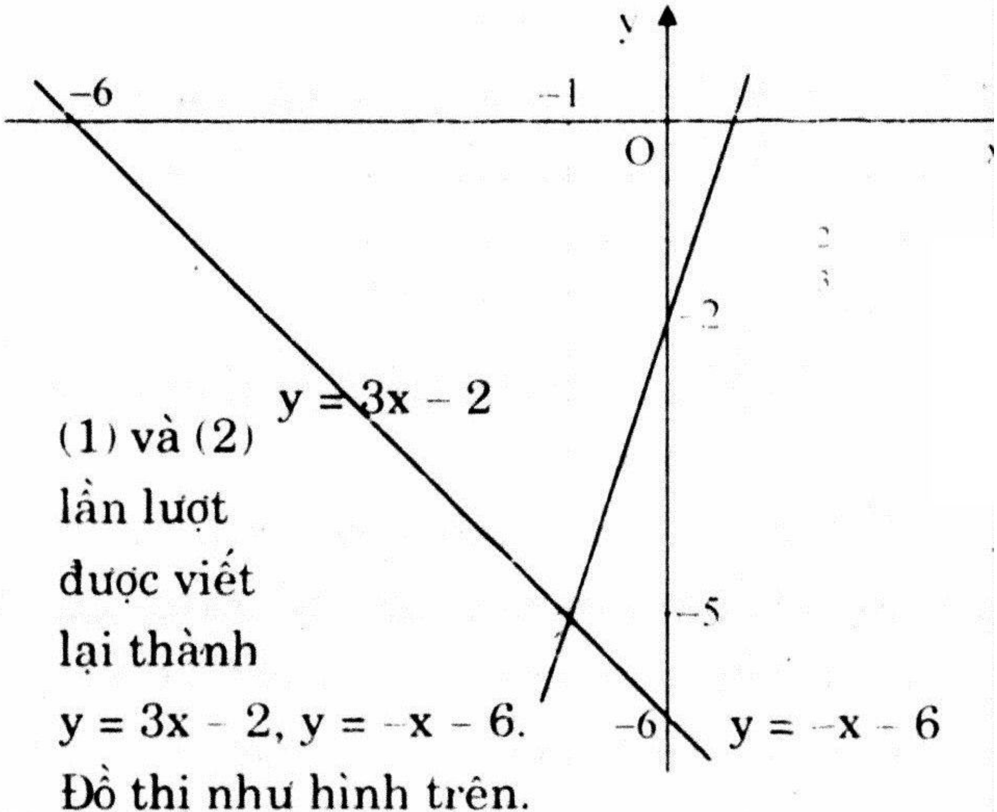
Hai hệ phương trình được gọi là *tương đương* với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm, nghĩa là mỗi nghiệm của hệ này cũng là nghiệm của hệ kia và ngược lại.

3.2.2. Vì tập hợp nghiệm của (1) và (2) là hai đường thẳng nên giao điểm (nếu có) của hai đường thẳng đó chính là nghiệm của hệ. Cách tìm nghiệm bằng việc biểu diễn các đường thẳng trên cùng một h trục rồi tìm giao điểm như thế được gọi l *cách giải hệ phương trình bằng đồ thị* Thông thường, để chắc chắn rằng gia điểm của hai đường thẳng chính là nghiệm tìm được, ta thực hiện thêm *bước thử lại* nghĩa là, thay toạ độ giao điểm vào cả ha phương trình xem có thoả mãn hay không.

Ví dụ: Hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3x - y = 2 & (1) \\ x + y = -6. & (2) \end{cases}$$

Giải.



(1) và (2) lần lượt được viết lại thành $y = 3x - 2$, $y = -x - 6$. Đồ thị như hình trên.

Toạ độ giao điểm là $(-1\ ;\ -5)$. Thay $x = -1$ và $y = -5$ vào (1) và (2) ta thấy chúng đượ thoả mãn. Vậy nghiệm duy nhất của hệ là

$$(x\ ;\ y) = (-1\ ;\ -5).$$

Ví dụ: Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 10y = -11 & (1) \\ 3x + 15y = \sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

Ta có $2x + 10y = -11 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{5}x - \dfrac{11}{10}$ và

$$3x + 15y = \sqrt{2} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{\sqrt{2}}{15}$$

nên hai đường thẳng biểu diễn nghiệm của (1) và (2) song song nhau (do chúng cùng hệ số góc). Hai đường thẳng này không có giao điểm nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm .

Ví dụ: Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 7y = -\sqrt{5} & (1) \\ 3x + 21y = -3\sqrt{5} & (2) \end{cases}$$

Ta nhận thấy hai đường thẳng có phương trình (1) và (2) trùng với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{7}x - \dfrac{\sqrt{5}}{7}$. Điều đó có nghĩa hai đường thẳng này có chung nhau vô số điểm. Nói cách khác, hệ phương trình có vô số nghiệm.

3.2.3. *Thực hành giải toán: Lập định thức*

Biểu thức

$$pq' - p'q$$

giữa các số p, q, p', q' được gọi là một *định thức* cấp hai, và được kí hiệu là

$$\begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix}.$$

Bây giờ, bằng cách sử dụng *định thức*, kết quả được tổng quát hóa như sau:

Xét hệ $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$,

(điều kiện $a^2 + b^2 \neq 0$ và $a'^2 + b'^2 \neq 0$).

Lập :

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix},\ D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix},\ D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}.$$

(1) Nếu $D \neq 0$: Hệ có nghiệm duy nhất (x ; y), trong đó $x = \dfrac{D_x}{D}$; $y = \dfrac{D_y}{D}$.

(2) Nếu $D = 0$:

* $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$: hệ vô nghiệm.

* $D_x = D_y = 0$: hệ có vô số nghiệm, tập nghiệm của hệ là tập nghiệm của hệ phương trình ax + by = c.

Ví dụ: Giải và biện luận hệ:

$$\begin{cases} mx + 4y = m^2 + 4 & (1) \\ x + (m+3)y = 2m + 3 & (2) \end{cases}$$

Giải. Ta có :

$$D = \begin{vmatrix} m & 4 \\ 1 & m+3 \end{vmatrix} = m^2 + 3m - 4 = (m-1)(m+4),$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m^2+4 & 4 \\ 2m+3 & m+3 \end{vmatrix}$$

$$= (m^2+4)(m+3) - 4(2m+3)$$

$$= m^3 + 3m^2 + 4m + 12 - 8m - 12$$

$$= m^3 + 3m^2 - 4m = m(m-1)(m+4).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m^2+4 \\ 1 & 2m+3 \end{vmatrix} = 2m^2 + 3m - m^2 - 4$$

$$= m^2 + 3m - 4 = (m-1)(m+4).$$

Do đó :

(1) Nếu $D \neq 0$, hay $m \neq 1$ và $m \neq -4$ hệ có nghiệm duy nhất $(x ; y) = (m ; 1)$.

(2) Nếu $D = 0$, tức $m = 1$ hoặc -4, ta cũng có $D_x = D_y = 0$. Khi đó, hệ phương trình có vô số nghiệm $(x; y)$ cho bởi :

$$* \ m = 1 : \begin{cases} x \in R \\ y = \dfrac{5-x}{4} \end{cases} ; \ * \ m = -4 : \begin{cases} x \in R \\ y = x + 5 \end{cases}.$$

3.3. *Giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn*

Ví dụ: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \\ y + z - x = 3 \end{cases}.$$

Hướng dẫn. Rút $z = 7 - x + y$ từ phương trình thứ nhất và thế vào hai phương trình sau, ta được hệ hai phương trình bậc nhất của hai ẩn x, y. Giải ra x, y, sau cùng suy ra z. Ta có nghiệm : $(4\ , 2\ , 5)$.

§ 4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

4.1. *Phương trình bậc hai một ẩn số*

Phương trình bậc hai một ẩn số là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$, trong đó a, b, c là các số cho trước, được gọi là các *hệ số*, $a \neq 0$.

4.2. *Giải và biện luận phương trình bậc hai*

Trong trường hợp tổng quát, để giải một phương trình bậc hai, ta làm như sau:

- *Lập biệt thức* $\Delta = b^2 - 4ac$

* $\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm.

* $\Delta = 0$: phương trình có nghiệm kép,

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

* $\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Trong trường hợp b là số chẵn, ta lập

$$\Delta' = b'^2 - ac, \text{ với } b = 2b'.$$

* $\Delta' < 0$: phương trình vô nghiệm.

* $\Delta' = 0$: phương trình có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}.$$

* $\Delta' > 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \dfrac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$.

* Dễ dàng suy ra kết quả : Nếu a và c trái dấu thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ: Giải phương trình:

$$x^4 - 2x + \frac{1}{2} = 0.$$

Giải. Ta có: $x^4 - 2x + \dfrac{1}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 - 2\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 - \left[\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[x^2 + 1 - \sqrt{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] \times$$

$$\times \left[x^2 + 1 + \sqrt{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - \sqrt{2}x + 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ x^2 + \sqrt{2}x + 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 2}}{2}.$$

§ 5. ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÍ VI-ÉT

5.1. *Định lí Vi-ét thuận*

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (với $a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì chúng thỏa mãn các hệ thức Vi-ét sau :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}. \quad (1)$$

Định lí Vi-ét đảo

Nếu hai số x_1, x_2 thỏa mãn các hệ thức Vi-ét (1) thì chúng là các nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$.

Hệ quả : Nếu hai số x, y thỏa mãn

$$S = x + y,\ P = xy$$

thì x, y là nghiệm của phương trình

$$t^2 - St + P = 0.$$

Ví dụ: Tìm m để phương trình

$$x^2 - (m + 3)x - m - 4 = 0$$

có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 2 < x_2$.

Giải. Ba hệ số thoả mãn

$$a - b + c = 1 + m + 3 - m - 4 = 0$$

nên một nghiệm bằng -1, nghiệm kia bằng

$$-\frac{c}{a} = \frac{m+4}{1} = m + 4.$$

Ta có $x_1 = -1 < 2 < x_2 = m + 4$.

Suy ra $m > -2$.

5.2. *Tính giá trị các biểu thức đối xứng giữa hai nghiệm*

* Một hệ thức được gọi là *đối xứng giữa hai nghiệm* nếu thay đổi vai trò giữa hai nghiệm thì không làm thay đổi hệ thức đó.

* Cần nhớ các kết quả căn bản sau:

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P \quad ;$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P} \; ;$$

$$x_1^3 + x_2^3 = S(S^2 - 3P) \; ;$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2} .$$

Ví dụ: Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + 2mx + 4 = 0$. Xác định m để $x_1^4 + x_2^4 \leq 32$.

Giải. Điều kiện để phương trình có nghiệm là

$$\Delta' = m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |m| \geq 2 . \qquad (1)$$

Ta có: $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2$

$$= \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2 - 2(x_1x_2)^2$$

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1x_2 = 4 \end{cases}.$$

Do đó: $x_1^4 + x_2^4 \le 32$

$$\Leftrightarrow (4m^2 - 8)^2 - 32 \le 32 \Leftrightarrow |m^2 - 2| \le 2$$

$$\Leftrightarrow -2 \le m^2 - 2 \le 2 \Leftrightarrow |m| \le 2. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $|m| = 2 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

5.3. *Tìm m để phương trình có hai nghiệm thoả mãn một hệ thức* không đối xứng *giữa các nghiệm*

Bước 1: Tìm điều kiện (*) để phương trình có nghiệm.

Bước 2: Tính S, P (phụ thuộc theo m).

Bước 3: Rút từ điều kiện không đối xứng của đề bài ra x_1 (hoặc x_2), thay vào S, P để lập phương trình theo m.

Bước 4: Giải phương trình, đối chiếu điều kiện (*) để chọn nghiệm.

Ví dụ: Cho phương trình

$$x^2 - (m - 1)x + 5m - 6 = 0.$$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $4x_1 + 3x_2 = 1$.

Giải. Để phương trình có hai nghiệm, ta cần có

$$m^2 - 22m + 25 \ge 0. \qquad (*)$$

Khi đó, từ $4x_1 + 3x_2 = 1$ suy ra

$$x_1 = \frac{1-3x_2}{4}\text{, vì vậy:}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{1-3x_2}{4} + x_2 \Rightarrow m - 1 = \frac{1+x_2}{4},$$

do đó $x_2 = 4m - 5$ và $x_1 = \dfrac{1-3(4m-5)}{4}$.

Như vậy:

$$x_1x_2 = (4m-5)\frac{1-3(4m-5)}{4} = 5m - 6$$

(theo Vi-ét). Giải ra ta được $m = 1$ và $m = \dfrac{7}{6}$, các giá trị này thỏa mãn (*).

§ 6. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

6.1. *Hệ gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai hai ẩn :* Để giải hệ này, ta tính x theo y từ phương trình bậc nhất, sau đó thay vào phương trình bậc hai.

Ví dụ: Giải hệ $\begin{cases} u + v = 11 \\ u^2 - 2v + 3u = 28 . \end{cases}$

Giải. Rút $v = 11 - u$ ở phương trình đầu và thay vào phương trình sau ta được phương trình $u^2 + 5u - 50 = 0$, suy ra $u = 5$, $u = -10$; nghiệm v tương ứng là

$$v = 6,\ v = 21.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(5, 6)$ và $(-10, 21)$.

6.2. *Hệ phương trình đối xứng*: Ta nói một hệ là *đối xứng với hai ẩn* khi ta thay đổi vị trí của x, y thì hệ không thay đổi. Trong trường hợp này, cách thông thường là đặt $S = x + y, P = xy$.

Ví dụ: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35. \end{cases}$$

Giải. Đặt $u = \sqrt{x} \geq 0, v = \sqrt{y} \geq 0$, ta có

$$\begin{cases} u^2v + v^2u = 30 \\ u^3 + v^3 = 35 \end{cases}, \text{ hay}$$

$$\begin{cases} uv(u + v) = 30 \\ (u + v)^3 - 3uv(u + v) = 35 \end{cases}.$$

Lại đặt $S = u + v$ và $P = u.v$, ta có:

$$\begin{cases} S.P = 30 & (1) \\ S^3 - 3P.S = 35\ . & (2) \end{cases}$$

Thế $SP = 30$ vào (2) ta được

$$S^3 = 125 \Leftrightarrow S = 5.$$

Thay vào (1) lại có $P = 6$. Vậy u, v là các nghiệm không âm của phương trình

$$t^2 - 5t + 6 = 0\ .$$

Phương trình này có nghiệm $t = 2, t = 3$.

Do đó ta được:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=2\\ v=3\end{cases}\\ \begin{cases}u=3\\ v=2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x}=2\\ \sqrt{y}=3\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x}=3\\ \sqrt{y}=2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4\\ y=9\end{cases}\\ \begin{cases}x=9\\ y=4\end{cases}\end{array}\right. .$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$(x, y) = (4\ ;\ 9), (9\ ;\ 4).$$

Chương 4

BẤT ĐẲNG THỨC - BẤT PHƯƠNG TRÌNH

---

§ 1. KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

1.1. *Định nghĩa* : Cho hai số a và b. Ta có :

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0\ ;\ a < b \Leftrightarrow a - b < 0.$$

Giả sử A và B là 2 biểu thức số (biểu thức chứa số, chữ và các phép toán). Khi đó, các mệnh đề "A > B", "A < B", "A ≥ B", "A ≤ B" được gọi là các *bất đẳng thức*. Trong bất đẳng thức, ta nói A, B là *hai vế của một bất đẳng thức*, A là *vế trái*, B là *vế phải*. Một bất đẳng thức có thể *đúng* hoặc *sai* và ta quy ước: Khi nói về một bất đẳng thức mà không nói gì thêm thì ta hiểu đó là một bất đẳng thức đúng.

1.2. *Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức*

Các chữ a, b, c ở đây được hiểu là các số hoặc các biểu thức.

1. Nếu $a > b$, $b > c$ thì $a > c$.

(Tính chất bắc cầu của bất đẳng thức).

2. Nếu $a > b$ thì $ma > mb$ nếu $m > 0$,

$ma < mb$ nếu $m < 0$.

3. Nếu $a > b$; $c > d$ thì $a + c > b + d$.

4. Nếu $a > b$; $c < d$ thì $a - c > b - d$.

5. Nếu $a > b > 0$ và $c > d > 0$, thì $ac > bd$.

6. Nếu $a > b > 0$ và $0 < c < d$, thì

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}.$$

7. Nếu $a > b > 0$ thì $a^n > b^n$, $\forall n$ nguyên dương.

8. Nếu $a > b$ thì $a^{2n+1} > b^{2n+1}$, $\forall n$ là số tự nhiên.

Ví dụ: Cho 3 số a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$abc + 2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) \geq 0.$$

Giải. Từ $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ suy ra

$$-1 \leq a, b, c \leq 1 \Rightarrow 1 + a \geq 0, \quad 1 + b \geq 0, \quad 1 + c \geq 0$$

$$\Rightarrow (1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 0,$$

$$\Rightarrow 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc \geq 0. \quad (1)$$

Ngoài ra, ta lại có:

$$(1 + a + b + c)^2 = [(1 + a) + (b + c)]^2$$

$$= (1+a)^2 + (b+c)^2 + 2(1+a)(b+c)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 +$$

$$+ 2ab + 2bc + 2ca + 2a + 2b + 2c + 1,$$

suy ra

$$1 + a + b + c + ab + bc + ca = \frac{(1+a+b+c)^2}{2},$$

do đó

$$1 + a + b + c + ab + bc + ca \geq 0. \qquad (2)$$

Cộng hai vế bất đẳng thức cùng chiều (1) và (2) ta được

$$abc + 2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) \geq 0.$$

§ 2. BẤT ĐẲNG THỨC VỀ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI BẤT ĐẲNG THỨC GIỮA TRUNG BÌNH CỘNG VÀ TRUNG BÌNH NHÂN

2.1. Đối với hai số a, b tùy ý ta có :

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \quad ||a| - |b|| \leq |a-b|.$$

Các đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$ab \geq 0.$$

2.2. a) Ta nói *trung bình cộng* của các số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

và *trung bình nhân* của các số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là: $\sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}$.

2.3. *Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân* : Trung bình cộng của các số thực không âm lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của chúng.

Trước đây, hầu hết tất cả các sách của nước ta gọi bất đẳng thức này là bất đẳng thức Cô-si (Cauchy). Ta gọi tắt bất đẳng thức này là TBC-TBN. Trong chương trình, ta chỉ xét trường hợp hai hoặc ba số không âm:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,, \qquad (1)$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b;

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{abc}\,, \qquad (2)$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

Ví dụ: Dùng (1) để chứng minh (2).

Đặt $B = \sqrt[3]{a.b.c}$, ta có $a+b+c+B =$

$$= a + b + (c + B) \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cB}\,. \quad (*)$$

Mặt khác, $2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cB} =$

$$2\sqrt{ab} + 2\sqrt{c\sqrt[3]{a.b.c}} = 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{\sqrt[3]{a.b.c^4}}$$

$$= 2(\sqrt{ab} + \sqrt[6]{a.b.c^4}\,)\,. \quad (**)$$

Bây giờ, lại áp dụng bất đẳng thức TBC-TBN cho hai số $\sqrt{ab}$ và $2\sqrt[6]{a.b.c^4}$, ta được :

$$2(\sqrt{ab}+\sqrt[6]{abc^4}) \geq 4\sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt[6]{abc^4}} =$$

$$= 4\sqrt{\sqrt[6]{(ab)^3abc^4}} = 4\sqrt{\sqrt[6]{(abc)^4}}$$

$$= 4\sqrt[12]{(abc)^4} = 4\sqrt[3]{abc}. \qquad (***)$$

Tóm lại, từ (*), (**) và (***) ta có :

$$a+b+c+\sqrt[3]{abc} \geq 4\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Dễ thấy dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$a = b = c.$$

Ví dụ: Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh: $\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{a^2+c^2}+\frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Giải. Vì $a^2+b^2+c^2=1$ nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{a^2}{a(1-a^2)}+\frac{b^2}{b(1-b^2)}+\frac{c^2}{c(1-c^2)}$$

$$\geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

Do $a>0, b>0, c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$ nên $0<a, b, c<1$. Ta khẳng định

$$\forall x \in (0; 1): \frac{1}{x(1-x^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Thật vậy, ta có:

$$\frac{1}{x(1-x^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x(1-x^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x^2(1-x^2)^2 \leq \frac{4}{27},$$

mặt khác, áp dụng bất đẳng thức TBC-TBN cho 3 số ta có: $2x^2(1-x^2)(1-x^2) \leq$

$$\leq \left(\frac{2x^2+1-x^2+1-x^2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$\Leftrightarrow x^2(1-x^2)^2 \leq \frac{4}{27}.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh:

$$\frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)}$$

$$\geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

2.4. *Các hệ quả thường dùng :*

* Nếu hai số dương thay đổi nhưng có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.

* Nếu hai số dương thay đổi nhưng có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau.

Về mặt hình học :

* Cho một hình vuông và một hình chữ nhật có cùng chu vi. Khi đó, diện tích

hình vuông không nhỏ hơn diện tích hình chữ nhật đó.

* Cho một hình vuông và một hình chữ nhật có cùng diện tích. Khi đó, chu vi hình vuông không lớn hơn chu vi hình chữ nhật đó.

* Trong tất cả các hình tam giác có cùng chu vi thì tam giác đều có diện tích lớn nhất (áp dụng bất đẳng thức TBC-TBN cho ba số và công thức Heron).

§ 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

3.1. *Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất một ẩn*

Ta gọi bất phương trình dạng

$$ax + b > 0 \qquad (1)$$

(hoặc $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$ và $ax + b \geq 0$) trong đó x là ẩn, a và b là các số đã cho, $a \neq 0$, là *bất phương trình bậc nhất một ẩn.*

Cách giải (1) :

- Nếu $a > 0$: $(1) \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$.

- Nếu $a < 0$: $(1) \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$.

- Nếu $a = 0$: Bất phương trình (1) trở thành $0x > -b$. Khi đó:

– Nếu $b \le 0$: bất phương trình vô nghiệm ;

– Nếu $b > 0$: bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

3.2. *Giải hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn*

Ta giải từng bất phương trình của hệ rồi lấy giao các tập nghiệm tìm được.

§ 4. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

4.1. *Dấu của nhị thức bậc nhất và các ứng dụng*

Một *nhị thức bậc nhất* theo x là một biểu thức đại số có dạng $ax + b$ trong đó a, b là hằng số với $a \neq 0$. Từ cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn số, suy ra bảng xét dấu của nhị thức $ax + b$:

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
ax+b	trái dấu với a	0	cùng dấu với a

Chú ý. Nói nôm na cho dễ nhớ: phải *cùng* trái *trái*.

4.2. Đối với một số bất phương trình bậc cao đặc biệt ta có thể giải bằng cách đưa bất phương trình về dạng $f(x) > 0$ (hoặc $f(x) < 0$), sau đó, phân tích f(x) thành nhân tử là những nhị thức bậc nhất (nếu có thể), rồi xét dấu từng nhị thức, cuối cùng, xét dấu tích các nhị thức đó.

Dấu của thương số $\frac{P}{Q}$ là dấu của tích số $P \times Q$, vì $\frac{P}{Q} = \frac{PQ}{Q^2}$ cùng dấu với $P \times Q$ (mẫu số $Q^2 > 0$). Vì dấu của một thương chính là dấu của một tích, nên để giải các bất phương trình chứa ẩn số ở mẫu thức, ta cũng có thể lập bảng xét dấu và giải như các bất phương trình tích.

Chú ý. Có thể lí luận theo từng trường hợp để xét dấu và tìm nghiệm của bất phương trình tích. Tuy nhiên, ngoại trừ những trường hợp quá đơn giản không cần lập bảng xét dấu, kinh nghiệm cho thấy rằng việc lập bảng xét dấu có thể tránh được những sai sót do bỏ qua một số trường hợp.

Khi lập bảng xét dấu, cần nhớ:

* tích các dấu cộng là dấu cộng,

* tích một dấu cộng và một dấu trừ là dấu trừ,

* tích một số chẵn các dấu trừ là dấu cộng,

* tích một số lẻ các dấu trừ là dấu trừ.

Ví dụ: *(Bất phương trình chứa ẩn ở mẫu)* Giải bất phương trình:

$$\frac{x+3}{2x^2-5x+3} \geq 0.$$

Giải. Ta có $2x^2 - 5x + 3 =$

$= 2(x^2 - x) + 3 - 3x = (x-1)(2x-3)$.

Biểu thức ở vế trái được xác định khi

$$x \neq 1 \text{ và } x \neq \frac{3}{2}.$$

$$\frac{x+3}{2x^2-5x+3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{(x-1)(2x-3)} \geq 0.$$

Ta có bảng xét dấu:

x		-3		1		$\frac{3}{2}$	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+3}{(x-1)(2x-3)}$	$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$

Dựa vào bảng trên ta kết luận: Nghiệm của bất phương trình là:

$$-3 \leq x < 1 \text{ hoặc } x > \frac{3}{2}.$$

4.3. *Giải phương trình, bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối*

Ví dụ: Tìm tập nghiệm của bất phương trình: $|x - 1| + |x + 2| < 5$. (1)

Giải. Bảng xét dấu :

x		-2		1	
$x - 1$	$-$	|	$-$	0	$+$
$x + 2$	$-$	0	$+$	|	$+$

Từ bảng xét dấu, ta xét các trường hợp:

* $x \geq 1$: $(1) \Leftrightarrow x - 1 + x + 2 < 5 \Leftrightarrow x < 2$.

Vậy $1 \leq x < 2$.

* $-2 < x < 1$: $(1) \Leftrightarrow -x + 1 + x + 2 < 5$

$\Leftrightarrow 3 < 5$ (đúng). Vậy $-2 < x < 1$.

* $x \leq -2$: $(1) \Leftrightarrow -x + 1 - x - 2 < 5 \Leftrightarrow x > -3$.

Vậy $-3 < x \leq -2$.

Kết luận: Bất phương trình có tập nghiệm là $\{x \mid -3 < x < 2\}$.

Chú ý. Khi làm bài, có thể không cần trình bày bảng xét dấu vào bài làm, tuy nhiên, cũng nên thực hiện ngoài giấy nháp để khỏi nhầm lẫn khi xét từng trường hợp. Đôi khi, để ngắn gọn, người ta dùng các kí hiệu để trình bày như lời giải dưới đây.

Ví dụ: Giải bất phương trình:

$$2x + |x - 1| > x + 5.$$

Giải.

Ta có: $2x + |x-1| > x + 5$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x + x - 1 > x + 5 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - (x-1) > x + 5 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 3 \\ x \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 1 > x + 5 \\ x < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 3.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x > 3$.

§ 5. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

5.1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn là bất phương trình có một trong các dạng

$$ax + by + c < 0,\ ax + by + c > 0,$$
$$ax + by + c \leq 0,\ ax + by + c \geq 0,$$

trong đó a, b và c là các số cho trước, $a^2 + b^2 \neq 0$ và x, y là các ẩn. Mỗi cặp $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $ax_0 + by_0 + c < 0$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$ (định nghĩa tương tự cho các bất phương trình còn lại).

5.2. ***Định lí.*** Trong mặt phẳng tọa độ, mỗi đường thẳng (d) có phương trình

$$ax + by + c = 0$$

chia mặt phẳng thành hai miền, một miền (không kể (d)) gồm các điểm có tọa độ thỏa mãn bất phương trình $ax + by + c < 0$, miền kia gồm các điểm có tọa độ thỏa mãn bất phương trình $ax + by + c > 0$.

Như thế, để xác định xem miền nào là miền nghiệm của bất phương trình

$$ax + by + c > 0,$$

ta chọn một điểm $(x_0 ; y_0)$ tùy ý thuộc một trong hai miền nói trên, nếu như $(x_0 ; y_0)$ thỏa mãn bất phương trình $ax + by + c > 0$ thì miền chứa $(x_0 ; y_0)$ là miền nghiệm, ngược lại, nếu $(x_0 ; y_0)$ *không* thỏa mãn bất phương trình $ax + by + c > 0$ thì miền *không* chứa $(x_0 ; y_0)$ là miền nghiệm của bất phương trình đã cho.

Để xác định miền nghiệm của một hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta lấy phần giao của các miền nghiệm của các bất phương trình đó.

5.3. *Ứng dụng vào bài toán Quy hoạch tuyến tính*

Giả sử ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của

một *hàm mục tiêu* T(x, y), trong đó (x, y) thuộc miền giao của một hệ các bất phương trình bậc nhất hai ẩn (hệ này được gọi là *hệ ràng buộc*). Nếu miền giao này là miền được giới hạn bởi một đa giác lồi thì trong *Lí thuyết Quy hoạch tuyến tính*, các đỉnh của đa giác lồi này được gọi là các điểm *cực biên*, và ta có kết quả:

Nếu T(x, y) đạt giá trị nhỏ nhất tại $(x_0; y_0)$ thì $(x_0; y_0)$ phải là một trong các điểm cực biên. Lí thuyết cũng chứng minh được rằng, trong trường hợp hàm mục tiêu là hàm tuyến tính và hệ ràng buộc chỉ gồm các bất phương trình tuyến tính thì cực tiểu chắc chắn đạt được.

Ví dụ: Một gia đình cần ít nhất 900g chất protêin và 400g chất lipit trong thức ăn mỗi ngày. Biết rằng thịt bò chứa 80% prôtêin và 20% lipit. Thịt lợn (heo) chứa 60% prôtêin và 40% lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất là 1600g thịt bò, 1100g thịt lợn; giá tiền 1kg thịt bò là 45000đ, 1kg thịt lợn là 35000đ. Giả sử gia đình mua x (kilôgam) thịt bò và y (kilôgam) thịt lợn.

a) Viết các bất phương trình biểu thị

các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình rồi biểu diễn hình học miền nghiệm (S) của hệ đó.

b) Gọi T (nghìn đồng) là số tiền phải trả cho x (kilôgam) thịt bò và y (kilôgam) thịt lợn. Hãy biểu diễn T theo x và y.

c) Ở câu a) ta thấy (S) là một miền đa giác lồi. Biết rằng T có giá trị nhỏ nhất tại $(x_0 ; y_0)$, với $(x_0 ; y_0)$ là tọa độ một trong các đỉnh của (S). Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kilôgam thịt mỗi loại để chi phí ít nhất ?

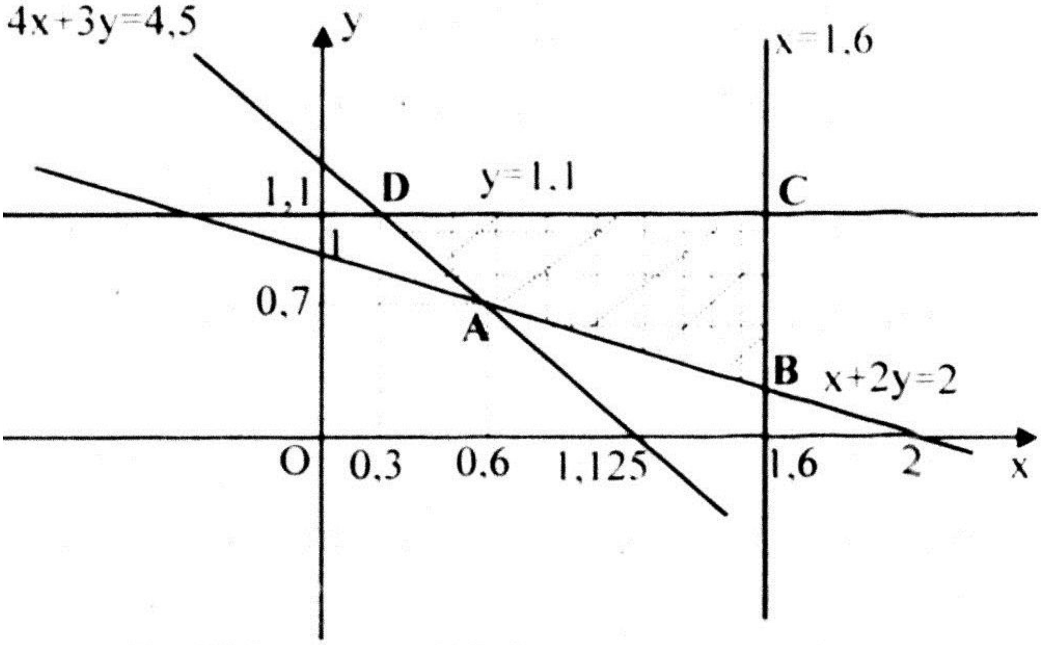
Giải. a) Giả sử gia đình mua x (kilôgam) thịt bò và y (kilôgam) thịt lợn, ta phải có $0 \le x \le 1,6$ và $0 \le y \le 1,1$. Trong số thịt đã mua này có $80\%x + 60\%y$ kg prôtêin, và có $20\%x + 40\%y$ kg lipit. Vì gia đình đó cần ít nhất 0,9kg chất prôtêin và 0,4kg chất lipit trong thức ăn mỗi ngày nên ta phải có : $80\%x + 60\%y \ge 0,9$ và $20\%x + 40\%y \ge 0,4$. Vậy x và y cần thỏa mãn hệ điều kiện (ràng buộc) :

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1,6 \\ 0 \le y \le 1,1 \\ 4x + 3y \ge 4,5 \\ x + 2y \ge 2 \end{cases}.$$

Miền nghiệm của hệ ràng buộc này được biểu diễn bởi phần gạch chéo có biên là tứ giác ABCD như hình vẽ. Bốn đỉnh có tọa độ là:

A(0,6 ; 0,7), B(1,6 ; 0,2),

C(1,6 ; 1,1) và D(0,3 ; 1,1).


4x+3y=4,5
y
x=1,6
1,1
D
y=1,1
C
1
0,7
A
B
x+2y=2
O
0,3
0,6
1,125
1,6
2
x

b) *Hàm mục tiêu:*

T(x, y) = 45x + 35y (nghìn đồng).

c) Vì cực tiểu chỉ đạt được tại một trong các đỉnh nên ta lần lượt tính giá trị của hàm mục tiêu T tại các đỉnh đó.

* Tại A :

T = 45.0,6 + 35.0,7 = 51,5 (nghìn đồng).

* Tại B :

T = 45.1,6 + 35.0,2 = 79 (nghìn đồng).

* Tại C :

T = 45.1,6 + 35.1,1 = 110,5 (nghìn đồng).

Tại D :

$T = 45.0,3 + 35.1,1 = 52$ (nghìn đồng).

Vậy $T(x, y)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $(0,6 ; 0,7)$, chi phí thấp nhất là 51500 đồng. Gia đình đó nên mua 600g thịt bò và 700g thịt lợn.

§ 6. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

6.1. Cho tam thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0).$$

* Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a, với mọi x.

* Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a, mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$.

* Nếu $\Delta > 0$, gọi hai nghiệm là x_1, x_2, với $x_1 < x_2$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x thuộc $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x thuộc $(x_1; x_2)$.

Nói nôm na cho dễ nhớ: trong trái ngoài cùng.

6.2. Định lí trên được vận dụng để giải các bất phương trình và hệ bất phương trình bậc hai.

§ 7. ĐỊNH LÍ ĐẢO VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

7.1. *Định lí.* Cho tam thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

và một số α. Nếu $af(\alpha) < 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và

$$x_1 < \alpha < x_2.$$

7.2. *Tóm tắt kết quả* so sánh một số α với hai nghiệm (nếu có) của tam thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

*Nếu $af(\alpha) = 0$ thì α là một nghiệm của tam thức.

*Nếu $af(\alpha) < 0$ thì tam thức có hai nghiệm phân biệt và $x_1 < \alpha < x_2$.

*Nếu $af(\alpha) > 0$ thì phải xét Δ. Khi $\Delta < 0$, vô nghiệm nên không thể so sánh. Khi $\Delta = 0$, so sánh trực tiếp giữa α và nghiệm kép. Ngoài ra, ta có :

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \alpha < \dfrac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha < x_1 < x_2 \text{ hoặc}$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \alpha > \dfrac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x_1 < x_2 < \alpha.$$

Ví dụ: Xác định m để phương trình sau có một nghiệm nhỏ hơn -1, còn nghiệm kia lớn hơn 1 :

$$(m + 1)x^2 - 2(2m - 1)x + 6m - 3 = 0.$$

Giải. Trước hết, phải có $m \neq -1$. Từ điều kiện đề bài: $x_1 < -1 < 1 < x_2$, điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} af(-1) < 0 \\ af(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(11m-4) < 0 \\ m(m+1) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < \dfrac{11}{4} \\ -1 < m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0.$$

Ví dụ: Tìm m để phương trình

$$mx^4 - (m-3)x^2 + 3m = 0$$

có một nghiệm bé hơn -2 và ba nghiệm kia lớn hơn -1.

Giải. Đặt $t = x^2$, phương trình trở thành $mt^2 - (m-3)t + 3m = 0$. Ta cần tìm m để phương trình này có hai nghiệm thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < 4 < t_2$. Ta có:

$$\begin{cases} af(1) < 0 \\ af(4) < 0 \\ af(0) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m(1+m) < 0 \\ 3m\left(4+5m\right) < 0 \\ 5m^2 > 0 \\ \dfrac{m-3}{2m} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 0 \\ \dfrac{-4}{5} < m < 0 \\ \forall m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{5} < m < 0 .$$

Vậy $m \in \left(-\frac{4}{5}; 0\right)$ thoả mãn điều kiện đề bài.

Chương 5

THỐNG KÊ

---

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. *Thống kê mô tả* là một bộ phận của *Thống kê học*, đó là khoa học về các phương pháp thu thập, tổ chức, trình bày, phân tích và xử lí dữ liệu, nó có tác dụng hỗ trợ cho người nghiên cứu (*người điều tra*) trong quá trình tổ chức một công cuộc nghiên cứu khoa học nhằm rút ra những kết quả phục vụ thực tiễn một cách hợp lí và hiệu quả nhất.

Ví dụ: Giả sử vấn đề đang quan tâm là *tình hình dân số thế giới*. Người nghiên cứu sẽ thu thập các số liệu liên quan đến nó (chẳng hạn, số dân từng quốc gia, từng vùng, diễn biến qua từng năm). Ở đây, *vùng, quốc gia* được gọi là các ***đơn vị điều tra***. Hiện tượng hay vấn đề mà người điều tra quan tâm tìm hiểu (*dân số thế giới*) được gọi là ***dấu hiệu***.

1.2. Một tập con hữu hạn các đơn vị điều tra được gọi là một ***mẫu***. Số phần tử của một mẫu được gọi là ***kích thước mẫu***. Dãy các giá trị của dấu hiệu nhận được trên mẫu được gọi là một ***mẫu số liệu***.

1.3. Đối tượng nghiên cứu của thống kê học là ***tổng thể*** (tập hợp các vật thể có cùng đặc tính chung có thể quan sát được, tức là tập tất cả các đơn vị điều tra). Nếu thực hiện điều tra trên toàn bộ tổng thể, ta gọi là ***điều tra toàn bộ***. Nhưng tổng thể thường rất rộng lớn, nên ta không thể quan sát hết các phần tử của tổng thể được (đôi khi không cần thiết). Do đó, ta phải ***điều tra mẫu***, nghĩa là chọn một số phần tử của tổng thể (***mẫu***) để nghiên cứu rồi từ các giá trị đặc trưng của ***mẫu***, ta suy đoán về các thông số của tổng thể.

§ 2. TRÌNH BÀY MỘT MẪU SỐ LIỆU

2.1. *Tần số, tần suất*

Tần số của mỗi giá trị khác nhau trong dãy giá trị của dấu hiệu là *số lần xuất hiện* của giá trị đó trong dãy. ***Tần suất*** của một giá trị trong dãy là *tỉ số giữa tần số của giá trị này và kích thước mẫu.* Xét giá trị x_i, kí hiệu tần số, tần suất của nó lần lượt là n_i, f_i, gọi N là kích thước mẫu, ta có: $f_i = \frac{n_i}{N}$. Người ta thường viết f_i *dưới dạng phần trăm*.

2.2. *Bảng phân bố tần số, tần suất* có thể được trình bày ở dạng *bảng ngang*, hoặc *bảng dọc*, bảng này giúp người điều tra dễ có những nhận xét chung về sự phân phối các giá trị của dấu hiệu. Nó là một bảng gồm 3 dòng (hoặc 3 cột, nếu ở dạng ngang). Dòng thứ nhất ghi các giá trị (x), dòng thứ hai ghi tần số tương ứng của mỗi giá trị (thông thường, để dễ tính toán, người ta còn ghi thêm ô kích thước mẫu N ở cuối dòng này), dòng thứ ba ghi các tần suất tương ứng.

Ví dụ: Người ta cần điều tra kết quả học tập môn Toán ở khối lớp 10 một trường nọ. Chấm 20 bài thi toán của 20 học sinh lớp 10 được chọn ngẫu nhiên tại trường này, các điểm số xuất hiện như sau:

4, 0, 1, 1, 3, 5, 9, 5, 5, 4, 9,

8, 5, 6, 6, 9, 6, 5, 5, 10.

Ta lập bảng phân bố tần số, tần suất:

Dạng ngang:

(x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
(n)	1	2	0	1	2	6	3	0	1	3	1	20
(f)	5 %	10 %	0 %	5 %	10 %	30 %	15 %	0 %	5 %	15 %	5 %	

Dạng dọc:

Điểm (x)	Tần số (n)	Tần suất (f)
0	1	5%
1	2	10%
2	0	0%
3	1	5%
4	2	10%
5	6	30%
6	3	15%
7	0	0%
8	1	5%
9	3	15%
10	1	5%
	N = 20	

2.3. *Bảng phân bố tần số - tần suất ghép nhóm* (hoặc *tần suất ghép lớp*)

Thông thường, khi có nhiều số liệu, để cho gọn, người ta ghép các số liệu thành các nhóm.

Ví dụ: Điều tra trọng lượng của một nhóm gồm 80 học sinh (số đo tính bằng kg), tiến hành chia bảng số liệu thành 5 nhóm, ta có bảng:

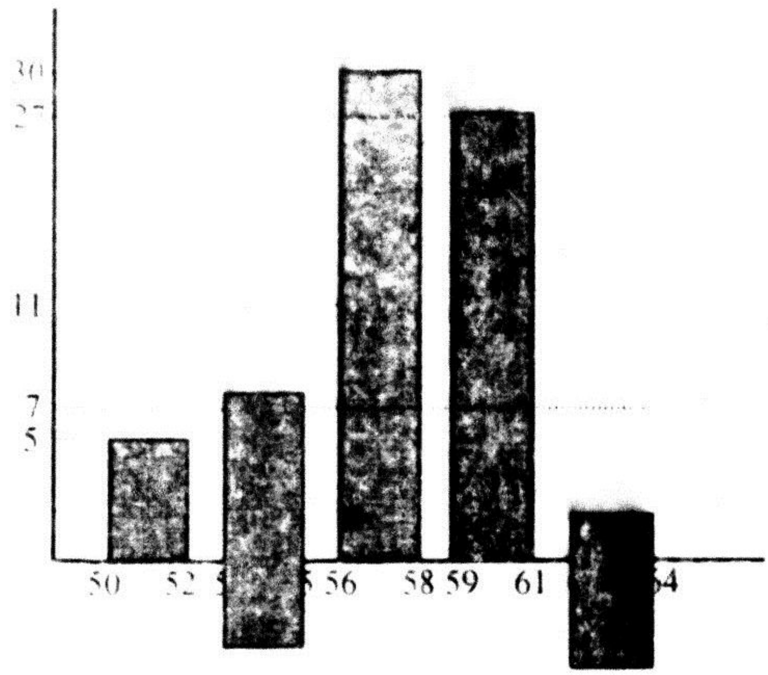
Nhóm	Khoảng	Tần số	Tần suất
1	50 - 52	5	6,25%
2	53 - 55	11	13,75%
2	56 - 58	30	37,5%
4	59 - 61	27	33,75%
5	62 - 64	7	8,75%
		N = 80	%

2.4. *Biểu đồ*

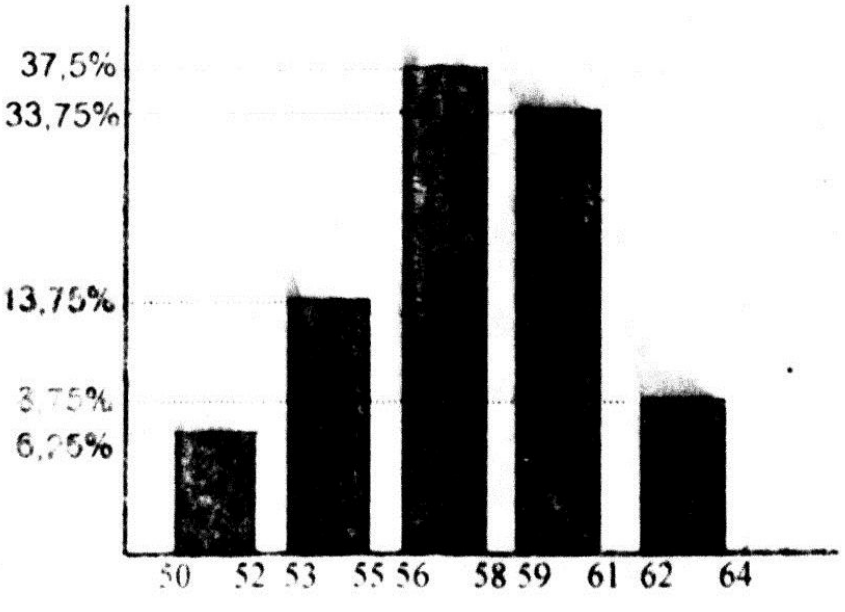
a) Biểu đồ tần số (hoặc *tần suất*) *hình cột*

Theo ví dụ trên, ta có các biểu đồ hình cột như sau: Trên trục nằm ngang, ta đánh dấu các khoảng xác định nhóm. Tương ứng mỗi khoảng này, ta dựng hình chữ nhật với đáy là khoảng đó, chiều cao bằng tần số (hoặc tần suất) tương ứng.

Biểu đồ tần số hình cột



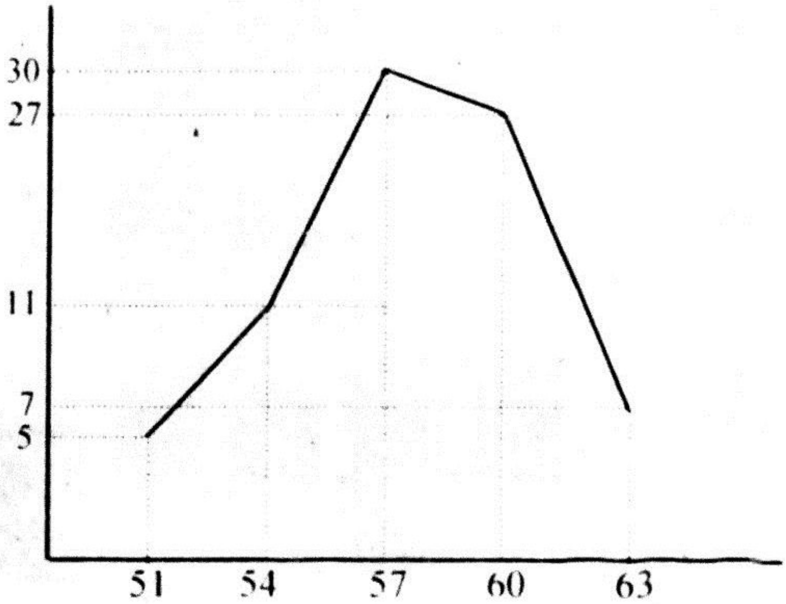
Biểu đồ tần suất hình cột



b) *Biểu đồ đa giác tần số*

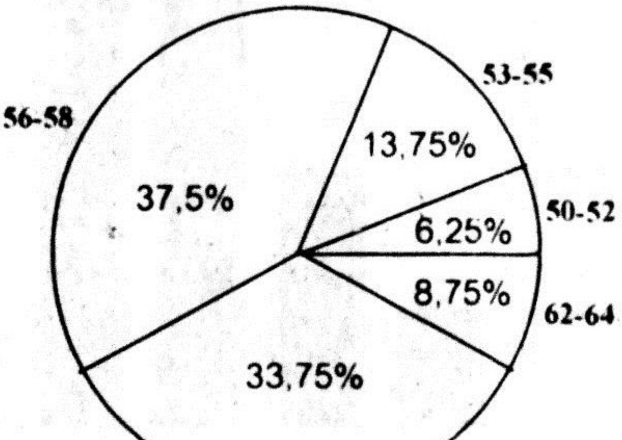
(hoặc *tần suất*)

Ứng với ví dụ trên, ta có biểu đồ đa giác tần số như sau (với đa giác tần suất, vẽ tương tự, chỉ thay số liệu *tần số* bằng tần suất). Các số ở trục hoành bây giờ là số trung bình cộng của các khoảng tương ứng.



c) *Biểu đồ hình quạt*

Ứng với ví dụ trên, ta có biểu đồ hình quạt cho tần suất.



§ 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU

3.1. *Số trung bình*

Cho mẫu có kích thước N :

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}.$$

Số trung bình của mẫu số liệu này, kí hiệu $\overline{x}$, là số cho bởi công thức:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{x_1 + \ldots + x_N}{N}.$$

Trong thực hành, $\overline{x}$ cũng có thể được tính từ bảng phân bố tần số theo các bước sau:

Bước 1: Nhân từng giá trị với tần số tương ứng.

Bước 2: Cộng tất cả các tích ở bước 1.

Bước 3: Chia tổng ở bước 2 cho số các giá trị (tức tổng các tần số = số N).

Còn đối với bảng phân bố tần số theo lớp ghép, ở bước 1, ta nhân cho trung điểm của khoảng chia.

Chẳng hạn, ứng với ví dụ trên, ta có

$$\overline{x} = \frac{5.51 + 11.54 + 30.57 + 27.60 + 7.63}{80}$$

$$= \frac{4620}{80} = 57,75.$$

3.2. *Số trung vị*

Số trung bình thường có thể được làm *đại diện* cho *mẫu*. Tuy nhiên, nó không thể làm đại diện cho mẫu được nếu khoảng chênh lệch các giá trị của mẫu rất lớn.

Ví dụ: Số trung bình cộng của dãy các giá trị sau đây không thể *đại diện* cho mẫu (ở đây, giả sử mỗi giá trị có tần số 1):

200 400 1200 ($\overline{x} = 600$)

bởi vì khoảng chênh lệch giữa các giá trị quá lớn.

Số trung vị của một mẫu N số liệu sắp xếp theo thứ tự không giảm là

- Số đứng giữa mẫu $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ nếu N lẻ.

- Trung bình cộng của hai số đứng giữa mẫu (đó là hai số thứ $\frac{N}{2}, \frac{N}{2}+1$) nếu N chẵn.

Ở ví dụ trên, số trung vị bằng 400.

3.3. *Mốt* (mode)

Mốt là *giá trị có tần số lớn nhất* trong bảng phân phối tần số. Ta có thể hiểu nôm na rằng *mốt* là giá trị được ưa chuộng nhất, bởi vì giá trị đó xuất hiện nhiều lần nhất.

Mốt được kí hiệu là m_0 (hoặc M_0).

Một bảng phân bố tần số có thể có ***nhiều mốt*** (trong trường hợp có nhiều giá trị cùng tần số).

Ở ví dụ của mục 2.3, mốt bằng 57 (khoảng 56-58 có tần số cao nhất là 30).

3.4. *Phương sai và độ lệch chuẩn*

Cho mẫu có kích thước N :

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}.$$

Phương sai của mẫu số liệu này, kí hiệu s^2, là số cho bởi công thức:

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2.$$

Độ lệch chuẩn: $s = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}$.

Chú ý. Người ta muốn tính xem *độ phân tán* của các giá trị chung quanh số trung bình ra sao. Ta biết rằng *độ lệch* giữa mỗi giá trị x_i với giá trị trung bình $\overline{x}$ là bằng $x_i - \overline{x}$. Tiếp theo, người ta muốn lấy trung bình các độ lệch này và xem nó như là độ phân tán. Tuy nhiên, với mọi mẫu, ta luôn có

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i - \overline{x} = 0.$$

Do vậy, người ta bèn lấy $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2$, và gọi nó là *phương sai*, rồi lại lấy căn bậc hai số học của nó, và gọi là *độ lệch chuẩn*.

Định lí.

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 .$$

Chú ý. Trong trường hợp bảng phân bố tần số theo lớp ghép, công thức trên được thay bằng (m là số các khoảng):

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - \left(\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2 .$$

3.5. *Hệ số biến thiên*

Hệ số biến thiên (tính theo phần trăm) là tỉ số giữa độ lệch chuẩn và số trung bình: $\frac{s}{\overline{x}}.100\%$.

Ví dụ: Cho bảng:

Nhóm	Khoảng	Tần số
1	50 - 60	2
2	60 - 70	6
3	70 - 80	10
4	80 - 90	8
5	90 - 100	4

Tính số trung bình, số trung vị, mốt, phương sai, độ lệch chuẩn và hệ số biến thiên.

Giải. Lấy trung bình các khoảng làm đại diện, ta có bảng sau:

Nhóm	Khoảng	Trung điểm	Tần số
1	50 - 60	55	2
2	60 - 70	65	6
3	70 - 80	75	10
4	80 - 90	85	8
5	90 - 100	95	4
			N = 30

Số trung bình:

$$\frac{55.2 + 65.6 + 75.10 + 85.8 + 95.4}{30} = 77.$$

Số trung vị: 75. Mốt: 75. Phương sai:

$$s^2 = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{5} n_i x_i^2 - \left(\frac{1}{30^2}\sum_{i=1}^{5} n_i x_i\right)^2 = 122,66.$$

Độ lệch chuẩn: s = 11,08.

Hệ số biến thiên: $\frac{s}{\overline{x}}.100\% = 14\%.$

3.6. ***Chú ý*** bổ sung về việc tính số trung vị.

Trong trường hợp bảng phân bố tần số ghép lớp mà mút bên phải của một khoảng cũng là mút bên trái của khoảng tiếp theo, việc tính số trung vị phức tạp hơn. Giả sử các khoảng kề nhau có độ dài h bằng nhau, kí hiệu chúng là $C_1, C_2, \ldots, C_m$, giả sử các tần số tương ứng của những khoảng này là $n_1, n_2, \ldots, n_m$. Khi đó, số trung vị được tính xấp xỉ theo cách sau:

a) Đầu tiên, xác định số nguyên dương k thỏa mãn điều kiện

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} < \frac{N}{2} \leq n_1 + n_2 + \ldots + n_k.$$

Nói cách khác, k là số nguyên dương bé nhất thỏa mãn điều kiện

$$\frac{N}{2} \leq n_1 + n_2 + \ldots + n_k.$$

b) Giả sử $C_k = [a_k ; a_{k+1})$. Khi đó, số trung vị được tính xấp xỉ theo công thức:

$$m = a_k + \frac{h\left(\frac{N}{2} - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}\right)}{n_k}.$$

Ví dụ: Cho bảng

Nhóm	Khoảng	Tần số
1	85,5 - 87,5	13
2	87,5 - 89,5	16
3	89,5 - 91,5	14
4	91,5 - 93,5	27
5	93,5 - 95,5	14
6	95,5 - 97,5	12
		N = 96

Để tính số trung vị, trước tiên, xác định số k. Ta có

$$\frac{N}{2} = \frac{96}{2} = 48.$$

Vì $13 + 16 + 14 = 43 < 48$

$$< 70 = 13 + 16 + 14 + 27$$

nên $k = 4$. Ta có $C_4 = [91.5; 93.5)$, $h = 2$.

Do đó, số trung vị là

$$m \approx 91.5 + \frac{2(48 - 43)}{27} \approx 91.87.$$

Chương 6

GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

---

§ 1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

1.1. *Các công thức*

- Cung tròn bán kính R có số đo a^0 ($0 \le a \le 360^0$) thì có độ dài $l = \frac{\pi a R}{180}$.
- $180^0 = \pi$ rad,
- $a^0 = \frac{\pi a}{180}$ rad ($0 \le a \le 360^0$),
- $\alpha \text{ rad} = \left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^0$ $(0 \le \alpha \le 2\pi)$, $l = R\alpha$.

1.2. Chọn *chiều dương* là chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ, chiều ngược lại (cùng chiều quay của kim đồng hồ) được gọi là *chiều âm*. Cho hai tia Ou, Ov. Một tia Om xuất phát từ Ou, luôn quay theo chiều dương (hoặc luôn quay theo chiều âm) đến trùng với tia Ov thì ta nói : *Tia Om quét một góc lượng giác có tia đầu Ou và tia cuối Ov.* Khi quay như thế, tia Om có thể gặp tia Ov nhiều lần, do vậy, có vô số góc lượng giác (Ou, Ov) có tia đầu Ou và tia cuối Ov. Nếu góc nhọn uOv = a^0 thì

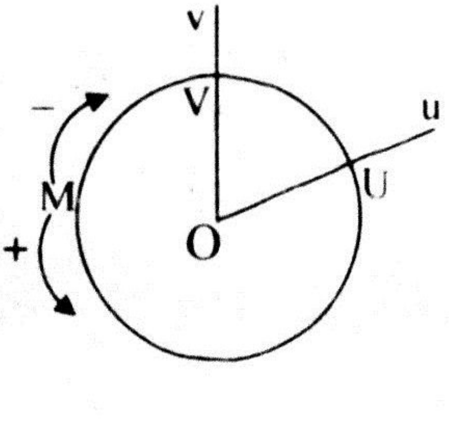
$$(Ou, Ov) = a^0 + k360^0,$$

trong đó, k là số nguyên.

Nếu góc nhọn uOv = α (rad) thì

$$(Ou, Ov) = \alpha + k2\pi \text{ (rad)}.$$

1.3. Đường tròn *định hướng* là đường tròn mà trên đó ta đã chọn chiều chuyển động của một điểm M (thuộc đường tròn), đó là chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ), hoặc chiều âm (cùng chiều kim đồng hồ).



Xác định hai tia Ou và Ov lần lượt đi qua U, V như hình vẽ, khi đó, cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{UV}$ là một họ các cung có cùng đầu mút đầu U, đầu mút cuối V, nó có số đo bằng (Ou, Ov).

1.4. *Hệ thức Sa-lơ* (Chasles)

Với ba tia bất kì Ou, Ov, Ow ta có

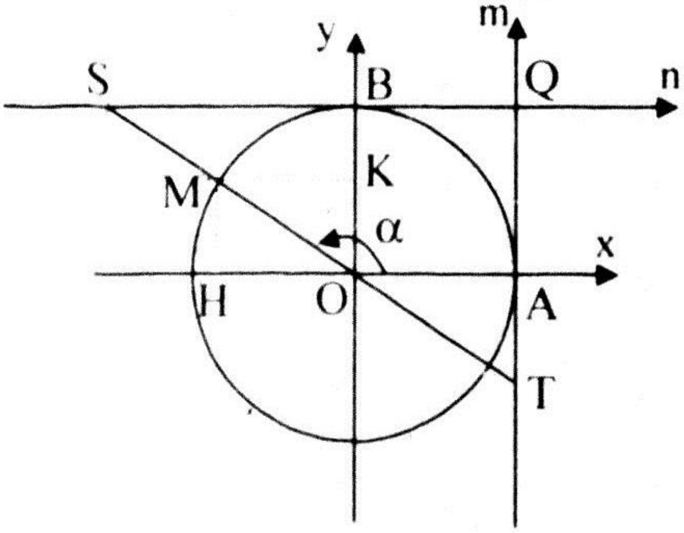
$$Sđ(Ou, Ov) + Sđ(Ov, Ow)$$

$$= Sđ(Ou, Ow) + k2\pi .$$

Hệ thức tương tự như thế cũng xảy ra cho số đo cung lượng giác, với ba điểm tùy ý U, V, W trên đường tròn định hướng.

§ 2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC

2.1. *Đường tròn lượng giác* là đường tròn đơn vị định hướng, trên đó có một điểm A gọi là điểm gốc. Ta thường chọn A(1; 0).



2.2. *Ở hình trên, ta có:*

Ox là trục cos, Oy là trục sin, Am là trục tang, Bn là trục cotg, OA = 1.

$$\overline{OK} = \sin\alpha, \ \overline{OH} = \cos\alpha,$$
$$\overline{AT} = tg\alpha, \ \overline{BS} = cotg\alpha.$$

2.3. *Tính chất* (ở đây, k là số nguyên)

$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha, \ \sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$$
$$-1 \le \cos\alpha \le 1, \ -1 \le \sin\alpha \le 1$$
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$
$$tg(\alpha + k\pi) = tg\alpha, \ cot\,g(\alpha + k\pi) = cot\,g\alpha$$
$$cot\,g\alpha = \frac{1}{tg\alpha} \ (\alpha \ne k\frac{\pi}{2})$$
$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \ (\alpha \ne k\frac{\pi}{2})$$
$$1 + cot\,g^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \ (\alpha \ne k\pi)$$

2.4. *Bảng giá trị lượng giác một số góc*

Góc	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	kxđ
cotg		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Trong bảng trên, kxđ là viết tắt của nhóm từ *không xác định*. Khi biết một giá trị lượng giác của góc, từ các công thức cơ bản, dễ dàng suy ra các giá trị còn lại.

§ 3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC (CUNG) CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

3.1. *Hai góc đối nhau*

Hai góc đối nhau thì có cos bằng nhau, sin, tg, cotg đối nhau.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \ \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\alpha, \ \text{cotg}(-\alpha) = -\text{cotg}\alpha .$$

3.2. *Hai góc hơn kém nhau* π

Hai góc hơn kém nhau π thì sin, cos đối nhau, tg và cotg bằng nhau.

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha, \ \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$$

$$\text{tg}(\alpha + \pi) = \text{tg}\alpha, \ \text{cotg}(\alpha + \pi) = \text{cotg}\alpha .$$

3.3. *Hai góc bù nhau*

Hai góc bù nhau thì sin bằng nhau, cos, tg và cotg đối nhau.

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg}\alpha, \ \text{cotg}(\pi - \alpha) = -\text{cotg}\alpha .$$

3.3. *Hai góc phụ nhau*

Hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cos góc kia, tg góc này bằng cotg góc kia.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{cotg}\alpha,\ \mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{tg}\alpha.$$

Chú ý. Nếu quên các công thức này, hãy vẽ đường tròn lượng giác với các trục sin, cos, tg, cotg để suy ra.

§ 4. MỘT SỐ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

4.1. *Công thức cộng đối với sin và cosin*

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

4.2. *Công thức cộng đối với tang*

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta},$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta},$$

với mọi α, β làm cho biểu thức có nghĩa.

4.3. *Công thức nhân đôi*

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

4.4. *Công thức hạ bậc*

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

4.5. *Công thức góc nhân ba*

$$\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Chú ý. Các công thức trên suy được dễ dàng từ các công thức nhân hai và công thức cộng, chẳng hạn:

$$\begin{aligned}
\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha)\\
&= \sin 2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha\\
&= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\\
&= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha\\
&= 3\sin\alpha - 3\sin^3\alpha - \sin^3\alpha\\
&= -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha.
\end{aligned}$$

4.6. ***Đưa về tang của góc chia đôi*** (tính

$\sin\alpha$; $\cos\alpha$; $\mathrm{tg}\alpha$ theo $t = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$)

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Phần

HÌNH HỌC

Chương 1

VECTƠ

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM VÀ ĐỊNH NGHĨA

1.1. *Vectơ là một đoạn thẳng có hướng*: Người ta biểu diễn vectơ bằng một mũi tên. Khác với đoạn thẳng thông thường, trong hai điểm mút của một vectơ, ta đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối. Nếu vectơ có điểm đầu là M và điểm cuối là N thì ta kí hiệu vectơ đó là $\overrightarrow{MN}$. Để thuận tiện, ta cũng kí hiệu một vectơ xác định nào đó bằng một chữ in thường, với mũi tên ở trên. Chẳng hạn, các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, ... hay $\vec{x}$, $\vec{y}$, ...

Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau được gọi là *vectơ-không*, kí hiệu là $\vec{0}$.

Chú ý. Như vậy, trong một bài toán hình học, khi cần chứng minh hai điểm M, N trùng nhau, ta có thể chứng minh

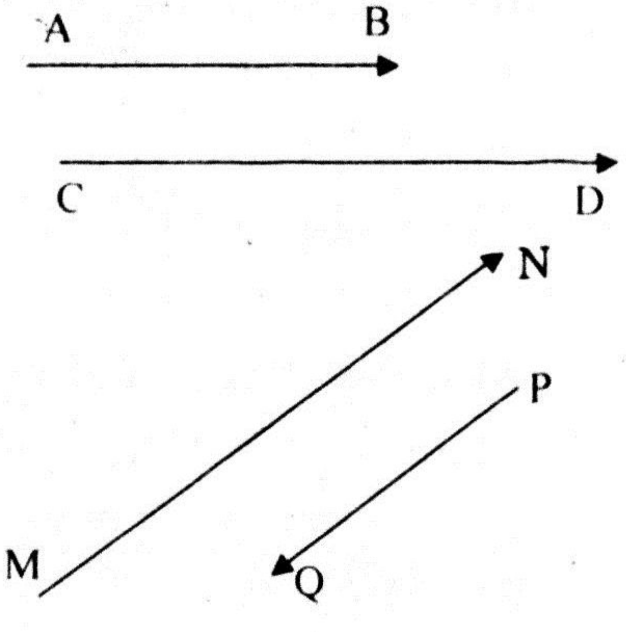
$$\overrightarrow{MN} = \vec{0}.$$

1.2. Mỗi vectơ đều có một *độ dài*, đó là *khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối* của vectơ đó. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$. Theo kí hiệu đó, $|\vec{0}| = 0$.

Với các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ}$, . . . ta có:

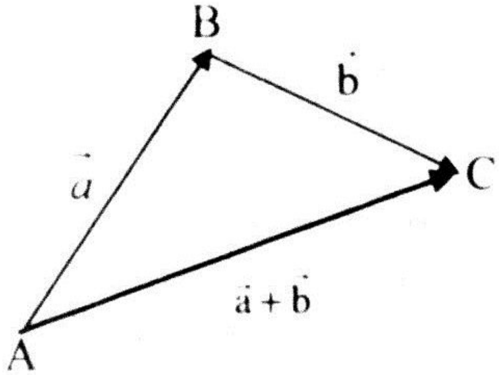
$|\overrightarrow{AB}| = AB = BA$; $|\overrightarrow{PQ}| = PQ = QP$.

1.3. Hai vectơ được gọi là *cùng phương* nếu chúng nằm trên hai đường thẳng song song, hoặc cùng nằm trên một đường thẳng. Nếu hai vectơ cùng phương thì hoặc chúng cùng hướng, hoặc chúng ngược hướng. Ví dụ, ở hình sau, hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng, còn hai vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ ngược hướng. Người ta quy ước : Vectơ-không cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ.



1.4. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là *bằng nhau*, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

§ 2. TỔNG CỦA HAI VECTƠ



2.1. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Từ một điểm A nào đó ta vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, rồi từ điểm B vẽ tiếp $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Kí hiệu : $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

2.2. *Tính chất*

a) Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

b) Tính chất kết hợp:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

c) Tính chất của vectơ-không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Chú ý một kết quả thường dùng:

Nếu M là trung điểm NP thì

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = \vec{0}.$$

2.3. *Quy tắc ba điểm:*

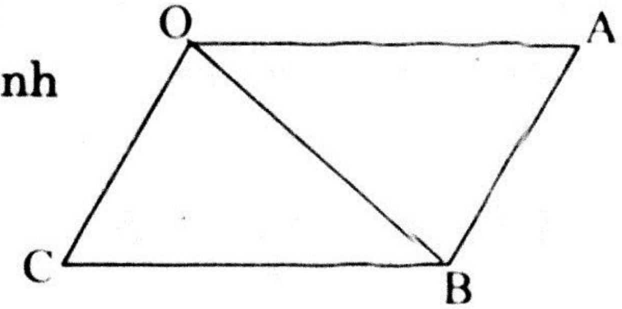
Với ba điểm bất kì M, N, P ta luôn luôn có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$. Mở rộng ra, với n điểm bất kì $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ta luôn có

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}.$$

Ta thường sử dụng quy tắc chen một hay nhiều điểm như trên để chứng minh các đẳng thức vectơ.

2.4. *Quy tắc đường chéo hình bình hành:*

Nếu OABC là hình bình hành thì ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$



Đây chỉ là một hệ quả của *quy tắc ba điểm*, với chú ý rằng $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$.

§ 3. HIỆU CỦA HAI VECTƠ

3.1. *Vectơ đối* của vectơ $\vec{a}\neq\vec{0}$ là vectơ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ và có cùng độ dài với vectơ $\vec{a}$.

Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

3.2. *Hiệu* của hai vectơ là tổng của vectơ thứ nhất với vectơ đối của vectơ thứ hai.

3.3. *Quy tắc cần nhớ:* Nếu $\overrightarrow{MN}$ là một vectơ đã cho, thì với điểm O bất kì ta luôn có thể viết : $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$.

Quy tắc trên cho phép ta biểu diễn một vectơ bất kì thành hiệu của hai vectơ có chung điểm đầu.

§ 4. NHÂN VECTƠ VỚI MỘT SỐ THỰC

4.1. Tích của vectơ $\vec{a}$ với số thực k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định:

a) Nếu $k \geq 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với vectơ $\vec{a}$.

Nếu $k < 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$.

b) Độ dài vectơ $k\vec{a}$ bằng $|k|$ lần độ dài vectơ $\vec{a}$: $|k\vec{a}| = |k|.|\vec{a}|$.

4.2. *Tính chất*

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và mọi số thực k, h, ta có :

i) $k(h\vec{a}) = (kh)\vec{a}$

ii) $(k + h)\vec{a} = k\vec{a} + h\vec{a}$

iii) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

iv) $1.\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$;

$0.\vec{a} = \vec{0}$; $k.\vec{0} = \vec{0}$.

* Vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$ (khác $\vec{0}$) khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho

$$\vec{b} = k\vec{a}.$$

* Để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng, điều kiện cần và đủ là tồn tại số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

* Điều kiện cần và đủ để C là trung điểm AB là $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$.

4.3. ***Biểu thị một vectơ theo hai vectơ không cùng phương***

Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều có thể biểu thị một cách duy nhất qua hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Nghĩa là : có duy nhất cặp số m và n sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Ví dụ: Chứng minh rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại hai số m, n không đồng thời bằng 0 sao cho

$$m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}.$$

Giải. Trường hợp một trong hai vectơ bằng vectơ-không thì tầm thường, nên có thể giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ-không.

Giả sử $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$, khi đó, theo trên, tồn tại số k sao cho $\vec{b} = k\vec{a}$, suy ra $-k\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. Chọn $m = -k$ và $n = 1$ ta có $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$.

Đảo lại, giả sử tồn tại hai số m, n không đồng thời bằng 0 sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$. Nếu $m \neq 0$ thì $\vec{a} = -\frac{n}{m}\vec{b}$, do đó $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$. Còn nếu $n \neq 0$ thì $\vec{b} = -\frac{m}{n}\vec{a}$, do đó $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$. Ta có điều phải chứng minh.

Kết quả cần nhớ: G là trọng tâm tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

* Nếu I là điểm bất kì và G là trọng tâm tam giác ABC thì $3\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}$, hay $3\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$, đây cũng là kết quả *cần nhớ*, vì thường được sử dụng.

Ví dụ: a) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và A'B'C' có trọng tâm trùng nhau là

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}.$$

b) Cho lục giác ABCDEF. Gọi P, Q, R, S, T, U lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác PRT và QSU có trọng tâm trùng nhau .

Giải. **a)** Giả sử G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và A'B'C'. Vì G' là trọng tâm tam giác A'B'C' nên :

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{GG'}&=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}\\&=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CC'}\\&=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}.\end{aligned}$$

($\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ do G là trọng tâm tam giác ABC). Vậy

$$3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}.$$

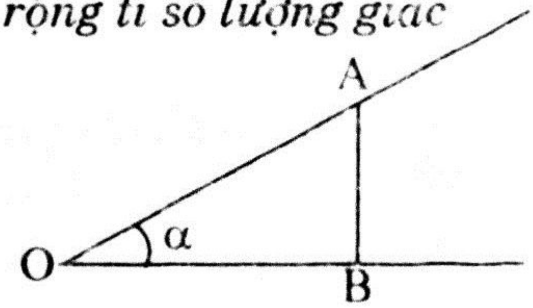
Từ đó suy ra rằng điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và A'B'C' có trọng tâm trùng nhau là $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

b) Để chứng minh hai tam giác PRT và QSU có cùng trọng tâm, theo câu trên, ta cần chứng minh : $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{TU} = \vec{0}$. Thật vậy, ta có:

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{TU} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA}) = \vec{0}.$$

§ 5. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

5.1. *Mở rộng tỉ số lượng giác*



(Khi học chương này, thì chương 6 ở phần đại số chưa học). Trước đây, ở lớp 9, nếu α là góc nhọn ($0 < \alpha < 90^0$) ta có:

$$\sin\alpha = \frac{AB}{OA} \;;\; \cos\alpha = \frac{OB}{OA} \;;$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{AB}{OB} \;;\; \mathrm{cotg}\alpha = \frac{OB}{AB}.$$

Ta có thêm các định nghĩa sau :

*** Nếu $\alpha = 0^0$ thì :**

$\sin 0^0 = 0$; $\cos 0^0 = 1$; $\mathrm{tg} 0^0 = 0$;

$\mathrm{cotg} 0^0$ không xác định.

*** Nếu $\alpha = 90^0$ thì :**

$\sin 90^0 = 1$; $\cos 90^0 = 0$;

$\mathrm{tg} 90^0$ không xác định ; $\mathrm{cotg} 90^0 = 0$.

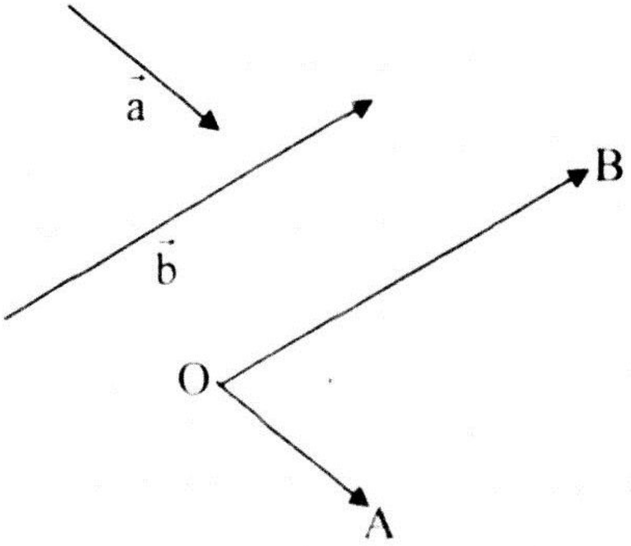
* Nếu α là góc tù hoặc bẹt ($90^0 < \alpha \le 180^0$) thì

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \sin(180^0 - \alpha)\ ; \\ \cos\alpha &= -\cos(180^0 - \alpha)\ ; \\ \mathrm{tg}\alpha &= -\mathrm{tg}(180^0 - \alpha)\ ; \\ \mathrm{cotg}\alpha &= -\mathrm{cotg}(180^0 - \alpha). \end{aligned}$$

Như vậy, ta có quy tắc: *Hai góc bù nhau có sin bằng nhau, còn cosin, tang và cotang của chúng đối nhau.*

5.2. *Góc giữa hai vectơ*

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ-không. Từ một điểm O (tuỳ ý) nào đó ta vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó : Số đo của góc AOB được gọi là *số đo góc hợp bởi hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$, hoặc đơn giản, là *góc giữa hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.



Trong trường hợp có ít nhất một trong

hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ-không thì ta có thể xem góc giữa hai vectơ đó là bao nhiêu cũng được. Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^0$ thì ta nói rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ *vuông góc* với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$.

5.3. *Tích vô hướng của hai vectơ*

5.3.1. *Tích vô hướng* của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, và được xác định bởi công thức :

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

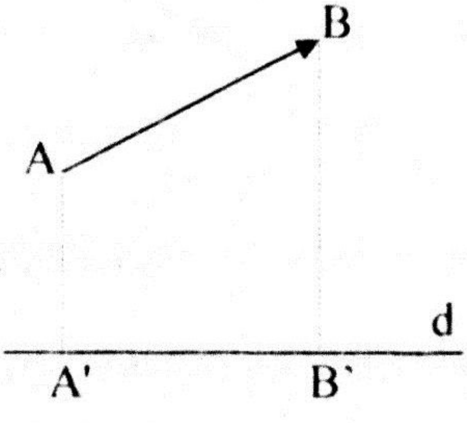
5.3.2. *Bình phương vô hướng*

Với vectơ $\vec{a}$ tuỳ ý, tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $(\vec{a})^2$ hay đơn giản hơn, $\vec{a}^2$, và gọi là *bình phương vô hướng* của $\vec{a}$.

Bình phương vô hướng của một vectơ bằng bình phương độ dài của vectơ đó:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|.|\vec{a}|\cos 0^0 = |\vec{a}|^2.$$

5.3.3. *Công thức hình chiếu*



Cho vectơ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ và đường thẳng (d). Gọi A' và B' là hình chiếu vuông góc của A và B trên (d). Khi đó vectơ $\vec{a'} = \overrightarrow{A'B'}$ được gọi là *hình chiếu* của vectơ $\vec{a}$ trên đường thẳng d.

Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì ta có *công thức hình chiếu:* $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{b'}$, trong đó $\vec{b'}$ là hình chiếu của vectơ $\vec{b}$ trên đường thẳng chứa vectơ $\vec{a}$.

5.3.4. *Kết quả quỹ tích cần nhớ*

Cho vectơ $\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ cố định. Khi đó, tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB} = k$, trong đó k là một số không đổi, là đường thẳng vuông góc với AB tại H, với H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng OB.

5.3.5. *Các tính chất của tích vô hướng*

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và mọi số thực k, ta có:

i) *Tính chất giao hoán:*

$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a};$$

ii) *Tính chất kết hợp:*

$$(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b});$$

iii) *Tính chất phân phối:*

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}.$$

Dùng các tính chất của tích vô hướng, dễ dàng chứng minh các công thức sau:

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b}$$

$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2.$$

Ví dụ: Cho hình bình hành ABCD. Tìm tập hợp những điểm M sao cho

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2,$$

với k là một số không đổi.

Giải. Gọi O là tâm hình bình hành ABCD ta có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow 4MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 + 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = k^2$$

$$\Leftrightarrow MO^2 = \frac{1}{4}(k^2 - 2OA^2 - 2OB^2).$$

Từ đó:

* Nếu $k^2 > 2OA^2 + 2OB^2$, tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O bán kính

$$\frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 2OA^2 - 2OB^2}.$$

* Nếu $k^2 = 2OA^2 + 2OB^2$, tập hợp các điểm M chỉ gồm duy nhất một điểm O.

* Nếu $k^2 < 2OA^2 + 2OB^2$, tập hợp các điểm M là tập rỗng.

Ví dụ: Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp và G là trọng tâm của một tam giác

ABC. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó, đặt a = BC, b = CA, c = AB. Chứng minh rằng

$$R^2 - OG^2 \geq \frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Giải. Gọi các vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ lần lượt là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Khi đó $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$. Suy ra $9OG^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a})$.

Ta có $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = R^2$,

$2\vec{a}\vec{b} = 2R^2\cos 2C = 2R^2 - AB^2 = 2R^2 - c^2$

và các hệ thức tương tự:

$2\vec{b}\vec{c} = 2R^2 - a^2$, $2\vec{c}\vec{a} = 2R^2 - b^2$. Từ đó,

$$9OG^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Ta lại có $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ (bất đẳng thức Côsi cho ba số). Do đó

$$R^2 - OG^2 \geq \frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

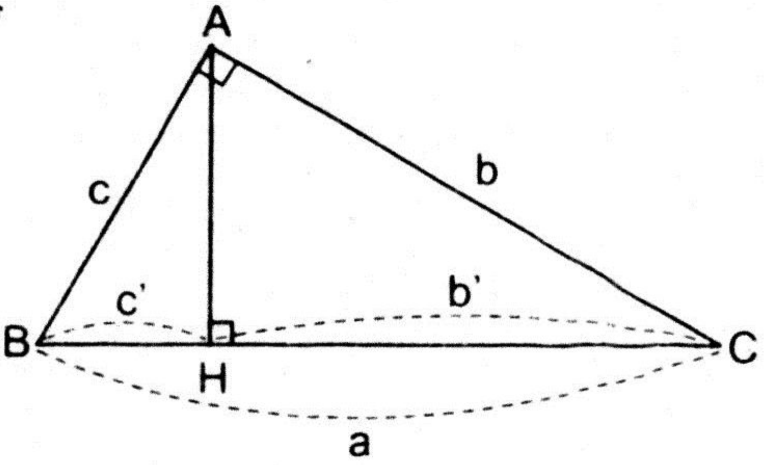
Chương 2

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ TRONG ĐƯỜNG TRÒN

---

§ 1. ĐỊNH LÍ SIN VÀ ĐỊNH LÍ COSIN TRONG TAM GIÁC

1.1. *Nhắc lại các hệ thức trong tam giác vuông*



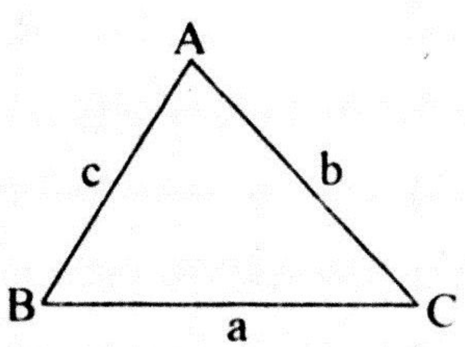
$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b = \sqrt{a.b'}\ ;\ c = \sqrt{a.c'}$$

$$h^2 = c'.b'\ ;\ h.a = b.c$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

1.2. *Định lí cosin trong tam giác và hệ quả*



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ví dụ: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) Góc A nhọn khi và chỉ khi

$$a^2 < b^2 + c^2.$$

b) Góc A tù khi và chỉ khi

$$a^2 > b^2 + c^2.$$

c) Góc A vuông khi và chỉ khi

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Giải. Ta chứng minh a). Tiến hành tương tự cho b) và c). Trong tam giác ABC, góc A nhọn khi và chỉ khi $\cos A > 0$. Ta có

$$\cos A > 0 \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2.$$

Ví dụ: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $a = b.\cos C + c.\cos B$;

b) $b^2 - c^2 = a(b.\cos C - c.\cos B)$;

c) $(b^2 - c^2)\cos A = a(c.\cos C - b.\cos B)$.

***Giải.* a)** Trong tam giác ABC, theo định lí hàm số cosin ta có:

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \\ b\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \end{cases}.$$

Cộng vế với vế hai đẳng thức trên ta được:

$$c.\cos B + b.\cos C$$

$$= \frac{a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a.$$

b) Áp dụng định lí hàm số cosin ta có:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B;$$

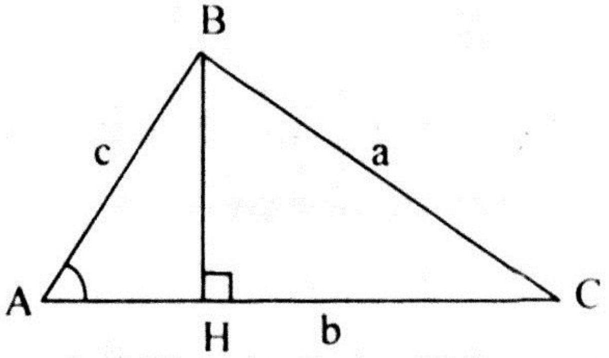
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Trừ vế với vế ta được:

$$b^2 - c^2 = c^2 - b^2 + 2ab.\cos C - 2ac.\cos B$$

$$2(b^2 - c^2) = 2a(b.\cos C - c.\cos B)$$

$$b^2 - c^2 = a(b.\cos C - c.\cos B).$$



c) Ta có: AH = c.cosA ; HC = a.cosC.

Vì b = AH + HC nên

$$b = c.\cos A + a.\cos C \Rightarrow c.\cos A = b - a\cos C$$

$$\Rightarrow c^2\cos A = bc - ac.\cos C. \quad (1)$$

Tương tự,

$$c = a.\cos B + b.\cos A \Rightarrow b.\cos A = c - a.\cos B$$

$$\Rightarrow b^2\cos A = bc - ab.\cos B. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $b^2\cos A - c^2\cos A =$

$$= bc - ab.\cos B - bc + ac.\cos C,$$

suy ra $(b^2 - c^2)\cos A = a(c\cos C - b\cos B)$.

1.3. *Định lí sin trong tam giác và hệ quả*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$a = 2R.\sin A,\ b = 2R.\sin B,\ c = 2R.\sin C.$$

Ví dụ: Cho tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp R và ba cạnh a, b, c thoả mãn $R(b + c) = a\sqrt{bc}$.

Tính các góc của tam giác đó.

Giải. Ta có $a = 2R.\sin A$, do đó, đẳng thức $R(b + c) = a\sqrt{bc}$ trở thành

$$\frac{1}{2}(b + c) = \sin A.\sqrt{bc}. \qquad (1)$$

Mặt khác,

$$\frac{1}{2}(b + c) \geq \sqrt{bc}, \qquad (2)$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c$; đồng thời, cũng có

$$\sin A.\sqrt{bc} \leq \sqrt{bc}, \qquad (3)$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = 90^0$.

Do đó, để (1) xảy ra thì đẳng thức ở (2) và (3) phải đồng thời xảy ra, nghĩa là phải có $b = c$ và $A = 90^0$, $B = 45^0$, $C = 45^0$.

§ 2. CÔNG THỨC TRUNG TUYẾN, DIỆN TÍCH TAM GIÁC

2.1. *Công thức trung tuyến*

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}; \quad m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4};$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4},$$

trong đó m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài ba trung tuyến xuất phát từ A, B, C và a, b, c là độ dài ba cạnh đối diện với ba đỉnh A, B, C trong tam giác ABC.

Ví dụ: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Giải. Vì G là trọng tâm tam giác nên $GA = \frac{2}{3}m_a$. Từ công thức đường trung tuyến suy ra $GA^2 = \frac{4}{9}m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{9}$.

Tương tự, $GB^2 = \frac{4}{9}m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{9}$,

$$GC^2 = \frac{4}{9}m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{9}.$$

Cộng các đẳng thức trên ta suy ra điều

phải chứng minh.

2.2. *Công thức tính diện tích tam giác*

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$$

$$S = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{1}{2}ac.\sin B = \frac{1}{2}bc.\sin A$$

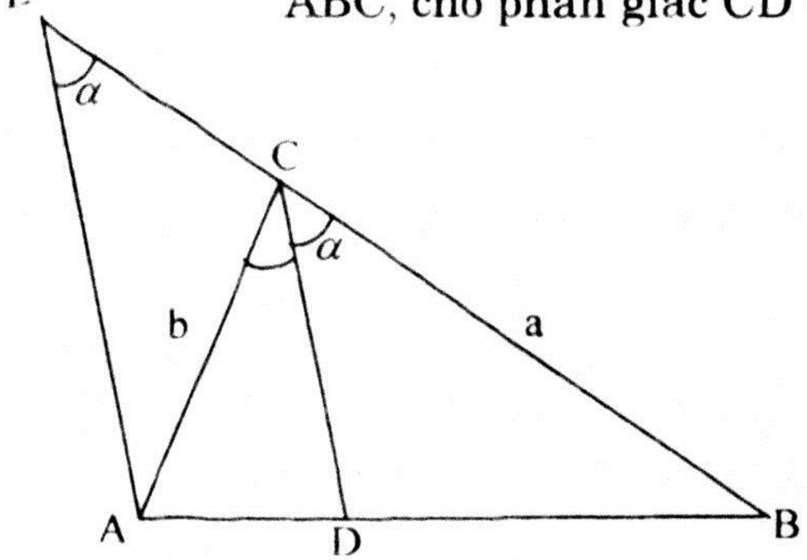
$$S = \frac{abc}{4R}\ ;\quad S = p.r$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ .$$

(p là nửa chu vi, h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C ; công thức sau cùng thường được gọi là công thức Hêrông).

Ví dụ: (*Công thức diện tích theo cạnh và phân giác*) Tính diện tích một tam giác, biết hai cạnh a, b và độ dài *l* của phân giác góc giữa hai cạnh đó.

Giải. Gọi tam giác đã cho là ABC, cho phân giác CD = *l*.



Đặt $\widehat{BCA} = 2\alpha$. Ta có

$$S_{ABC} = S_{BCD} + S_{DCA} = \frac{1}{2}(a+b)l.\sin\alpha.$$

Kẻ đường thẳng qua A và song song CD, cắt BC tại E. Tam giác ACE cân nên CE = b và AE = $2b\cos\alpha$. Mặt khác,

$$\frac{CD}{AE} = \frac{BC}{BE} \Rightarrow AE = \frac{a+b}{a}l.$$

Do đó $\cos\alpha = \frac{a+b}{2ab}l$, suy ra

$$\sin\alpha = \frac{1}{2ab}\sqrt{4a^2b^2 - (a+b)^2l^2}.$$

Cuối cùng ta được:

$$S_{ABC} = \frac{(a+b)l}{4ab}\sqrt{4a^2b^2 - (a+b)^2l^2}.$$

§ 3. GIẢI TAM GIÁC

Giải tam giác là tìm cách xác định các yếu tố còn lại của tam giác (các góc và các cạnh còn lại) theo ba yếu tố đã biết. Trong các yếu tố đã biết, có ít nhất một yếu tố về cạnh. Ta thường vận dụng định lí cosin, định lí sin để giải tam giác. Các bài toán thường gặp trong chương trình là: Tính được các cạnh, các góc chưa biết của tam giác khi đã biết ba cạnh, hoặc hai cạnh và góc xen giữa, hoặc một cạnh và hai góc kề.

3.1. *Giải tam giác khi đã biết ba cạnh*

Khi biết ba cạnh a, b, c, ta sử dụng định lí cosin để tính các góc. Chẳng hạn, để tính góc A, ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Góc B cũng được suy ra bằng cách tương tự, hoặc sau khi đã tính được góc A, có thể dùng công thức nhận được từ định lí sin:

$$a\sin B = b\sin A \Rightarrow \sin B = \frac{b\sin A}{a}.$$

3.2. *Giải tam giác khi đã biết hai cạnh (b, c) và góc (A) xen giữa chúng*

Dùng định lí cosin để tính cạnh a:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A.$$

Để tính góc B, có thể sử dụng:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\text{hoặc } \sin B = \frac{b\sin A}{a}.$$

3.3. *Giải tam giác khi đã biết một cạnh và hai góc*

Khi biết một cạnh và hai góc, ta dùng định lí sin để tính hai cạnh còn lại.

3.4. *Giải tam giác khi đã biết hai cạnh (b, c) và góc (B) không xen giữa*

Khi biết hai cạnh và một góc không xen giữa, ta dùng định lí sin để tính một trong hai góc kia, và cũng dùng định lí sin để tính cạnh còn lại (hoặc dùng định lí cosin sau khi đã tính góc).

§ 4. PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM ĐỐI VỚI MỘT ĐƯỜNG TRÒN

4.1. *Nhắc lại kết quả đã biết ở lớp 9*

Cho đường tròn tâm O, bán kính R và một điểm M cố định. Một đường thẳng (d) đi qua M, cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Một đường thẳng (d') đi qua M, cắt đường tròn tại hai điểm C và D. Ta có: MA.MB = MC.MD. Đẳng thức này chứng tỏ tích hai đoạn MA. MB không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng (d), chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm M.

4.2. *Phương tích của một điểm đối với một đường tròn*

Cho đường tròn tâm O, bán kính R và một điểm M cố định, MO = d. Một đường thẳng di động (m) đi qua M, cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Khi đó, tích vô hướng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ là một số không đổi, và

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2.$$

Tích vô hướng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ được gọi là *phương tích của điểm* M *đối với đường tròn* (O), kí hiệu $\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2$.

* Như vậy, để tính phương tích $\mathscr{P}_{M/(O)}$, ta cần nhớ:

a) Nếu có cát tuyến MAB thì

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}.$$

b) Nếu biết MO = d và bán kính đường tròn là R thì $\mathscr{P}_{M/(O)} = d^2 - R^2$.

c) Nếu M ở ngoài đường tròn, biết độ dài tiếp tuyến MT thì

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = MT^2.$$

d) Ta quy ước: $\mathscr{P}_{M/(O)} = 0$ khi và chỉ khi M nằm trên (O).

e) Nếu M ở ngoài đường tròn ($d > R$), phương tích là một số dương:

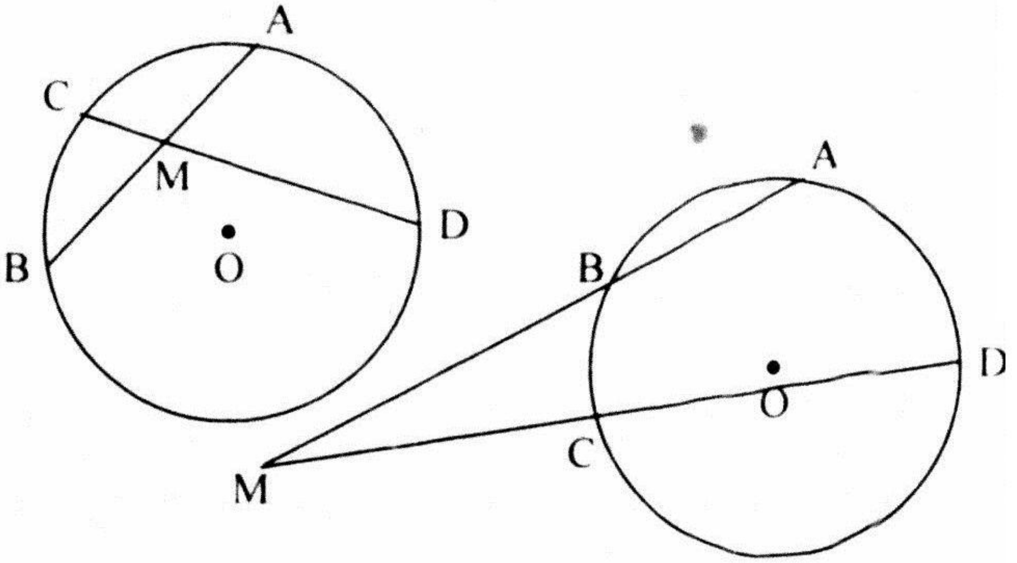
$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA.MB.$$

f) Nếu M ở trong đường tròn ($d < R$), phương tích là một số âm:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -MA.MB.$$

4.3. *Điều kiện bốn điểm cùng thuộc một đường tròn*

Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại một điểm M. Khi đó, bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn nếu và chỉ nếu $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$.

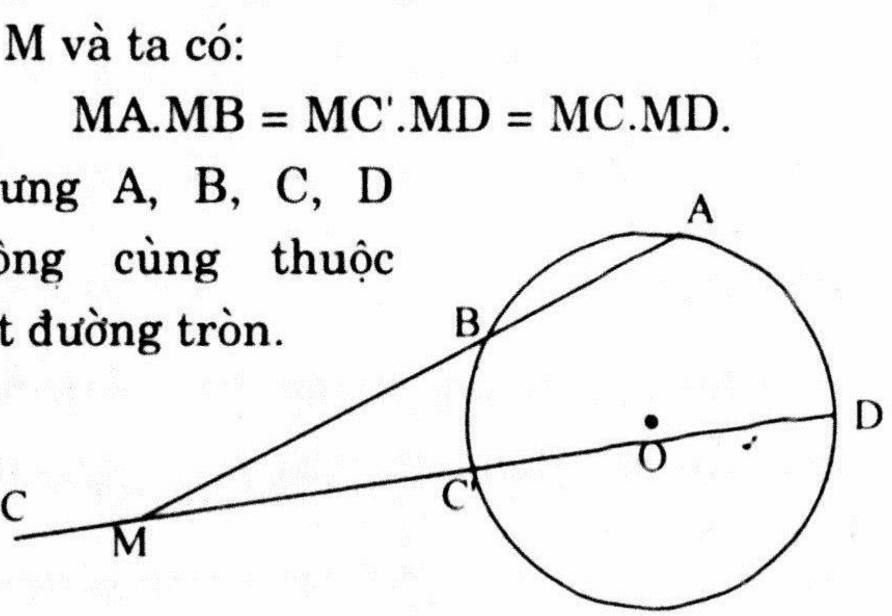


Ví dụ: Xét mệnh đề sau: *Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại một điểm M. Khi đó, bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn nếu và chỉ nếu MA.MB = MC.MD.* Mệnh đề này có luôn đúng không, tại sao?

Giải. Không luôn luôn đúng. *Ví dụ:* Trên hình vẽ sau, giả sử MC = MC'. Rõ ràng hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M và ta có:

$$MA.MB = MC'.MD = MC.MD.$$

Nhưng A, B, C, D không cùng thuộc một đường tròn.



Ví dụ: Cho đường tròn tâm O bán kính R và k là một số thực. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\mathscr{P}_{M/(O)} = k$.

Giải. $\mathscr{P}_{M/(O)} = k \Leftrightarrow MO^2 - R^2 = k$

$$\Leftrightarrow MO^2 = R^2 + k.$$

Nếu $R^2 + k > 0$ thì tập hợp điểm M là đường tròn tâm O bán kính bằng $\sqrt{R^2 + k}$. Nếu $R^2 + k = 0$ thì tập hợp điểm M là một điểm O. Nếu $R^2 + k < 0$ thì tập hợp điểm M là tập rỗng.

§ 5. TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

5.1. *Trục đẳng phương* của hai đường tròn

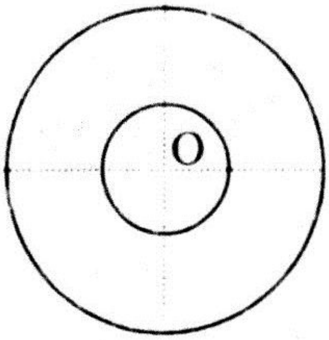
Tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn là một đường thẳng vuông góc với đường nối tâm, ta gọi đường thẳng này là *trục đẳng phương* của hai đường tròn đó.

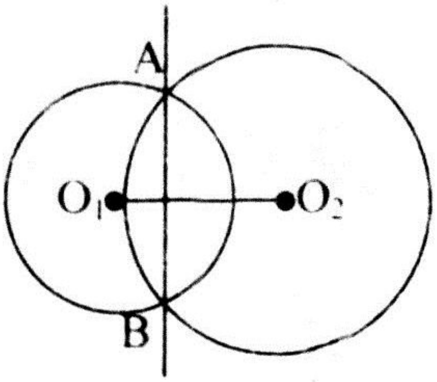
5.2. *Cách dựng trục đẳng phương*

* Nếu hai đường tròn đồng tâm, có bán kính khác nhau thì với mọi điểm M,

$$OM^2 - R^2 \neq OM^2 - r^2,$$

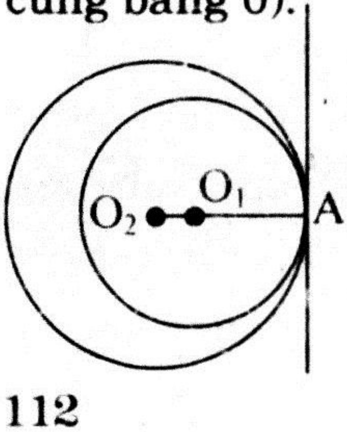
do đó, tập hợp các điểm M có cùng phương tích với hai đường tròn là tập rỗng. Điều này có nghĩa hai đường tròn đồng tâm, có bán kính khác nhau thì không có trục đẳng phương.

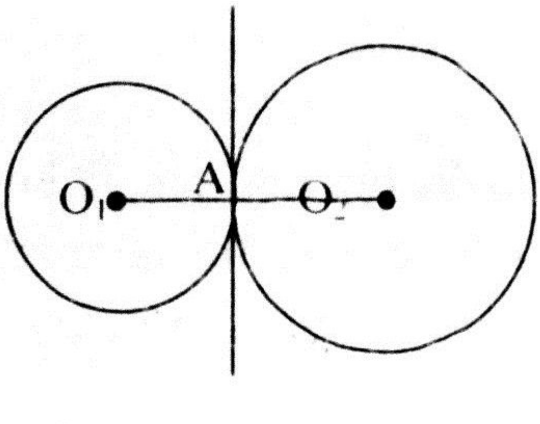




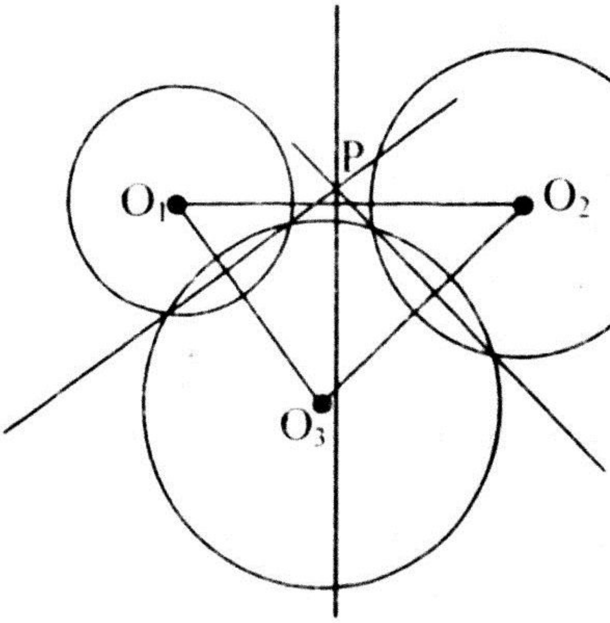
* Nếu hai đường tròn giao nhau tại hai điểm, trục đẳng phương của hai đường tròn này chính là đường thẳng nối hai giao điểm đó, đường này vuông góc với đường thẳng nối hai tâm. (Do A, B thuộc hai đường tròn nên phương tích của hai điểm A và B đối với hai đường tròn đều bằng 0).

* Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau (tại A), trục đẳng phương của chúng là đường thẳng đi qua tiếp điểm và vuông góc với đường thẳng nối hai tâm, đó chính là tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại điểm A. (Do A thuộc hai đường tròn nên phương tích của A đối với hai đường tròn cùng bằng 0).





* Nếu hai đường tròn (O_1) và (O_2) không giao nhau, ta có thể xác định trục đẳng phương của chúng bằng cách vẽ một đường tròn thứ ba là (O_3) giao với cả hai đường tròn đó. Gọi P là giao điểm của trục đẳng phương (O_1) và (O_3) với trục đẳng phương (O_2) và (O_3). Khi đó, trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) là đường thẳng qua P và vuông góc với đường thẳng nối hai tâm của (O_1) và (O_2).



Chứng minh. Rõ ràng

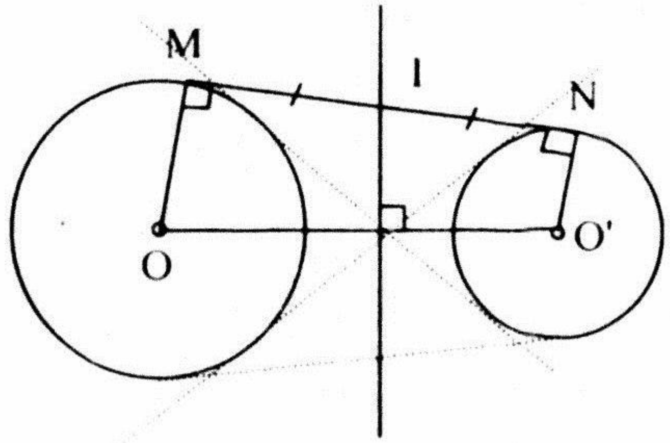
$$\mathscr{P}_{P/(O_1)} = \mathscr{P}_{P/(O_3)} = \mathscr{P}_{P/(O_2)}.$$

Suy ra P nằm trên trục đẳng phương của (O_1) và (O_2), do đó trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) là đường thẳng qua P và vuông góc với đường thẳng nối hai tâm của (O_1) và (O_2).

Chú ý. Ta thường sử dụng tính chất *trục đẳng phương* để chứng minh ba điểm thẳng hàng.

Ví dụ: Cho hai đường tròn ngoài nhau. Chứng minh rằng 4 trung điểm của 4 đoạn tiếp tuyến chung (tức là đoạn thẳng nối hai tiếp điểm của cùng một tiếp tuyến) nằm trên cùng một đường thẳng.

Giải. Gọi I là trung điểm của tiếp tuyến chung ngoài MN. Ta có IM = IN hay $IM^2 = IN^2$, tức là $\mathscr{P}_{I/(O)} = \mathscr{P}_{I/(O')}$. Vậy điểm I nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn. Chứng minh tương tự cho ba trung điểm còn lại, chúng đều nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn ngoài nhau.



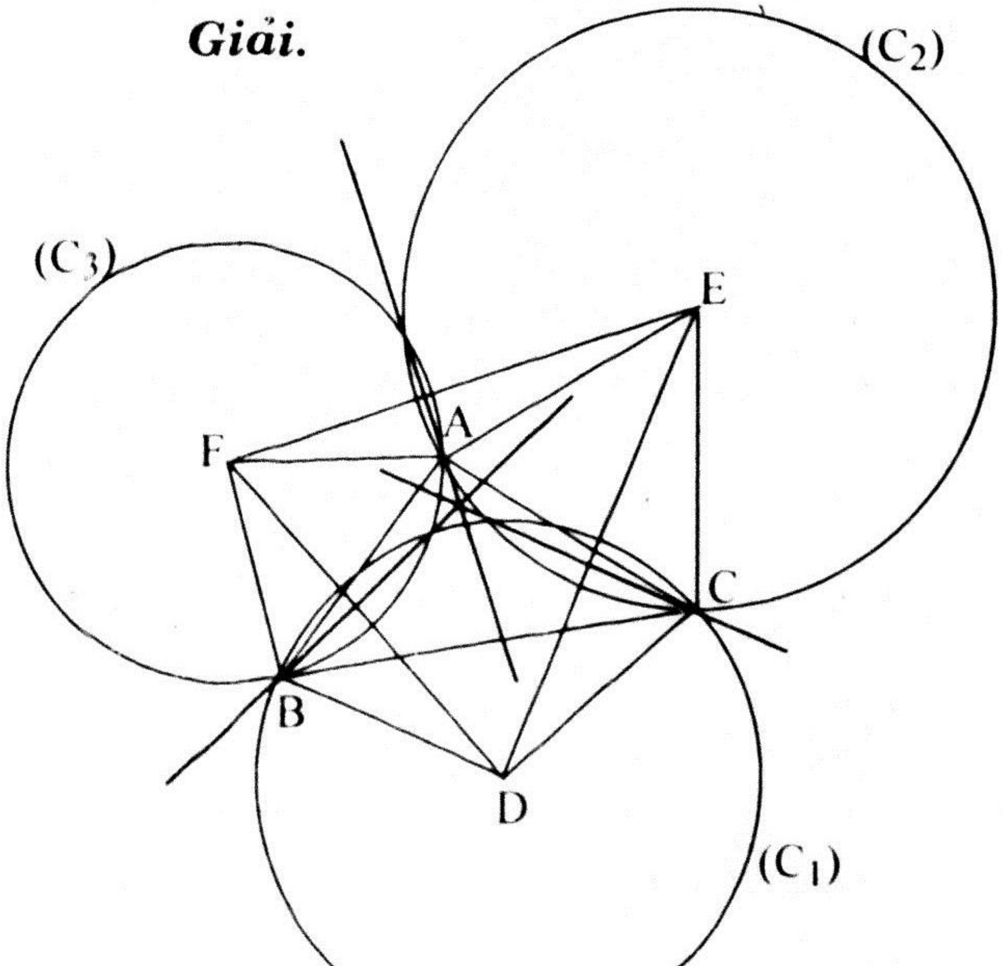
5.3. *Tâm đẳng phương*

Trong trường hợp có 3 đường tròn (O_1), (O_2) và (O_3) có các tâm tương ứng là O_1 , O_2 và O_3 không thẳng hàng, ta cũng dễ thấy 3 trục đẳng phương của 3 cặp đường tròn đồng quy tại một điểm (như hình ở trang 113, đó chính là điểm P). Ta gọi điểm này là *tâm đẳng phương* của 3 đường tròn.

Chú ý. Ta thường sử dụng *tâm đẳng phương* để chứng minh ba đường thẳng đồng quy.

Ví dụ: Cho tam giác ABC, bên ngoài tam giác này, vẽ các tam giác cân BCD, CAE, ABF có các cạnh đáy tương ứng là BC, CA, AB. Chứng minh rằng ba đường thẳng vuông góc kẻ từ A, B, C tương ứng xuống EF, FD, DE đồng quy.

Giải.



Gọi (C_1) là đường tròn tâm D bán kính BD, (C_2) là đường tròn tâm E bán kính CE và (C_3) là đường tròn tâm F bán kính AF. Đường thẳng qua A vuông góc với EF là trục đẳng phương của (C_2) và (C_3); đường thẳng qua B vuông góc với FD là trục đẳng phương của (C_3) và (C_1); đường thẳng qua C vuông góc với DE là trục đẳng phương của (C_1) và (C_2). Ba đường thẳng này đồng quy tại tâm đẳng phương của ba đường tròn, suy ra điều phải chứng minh.

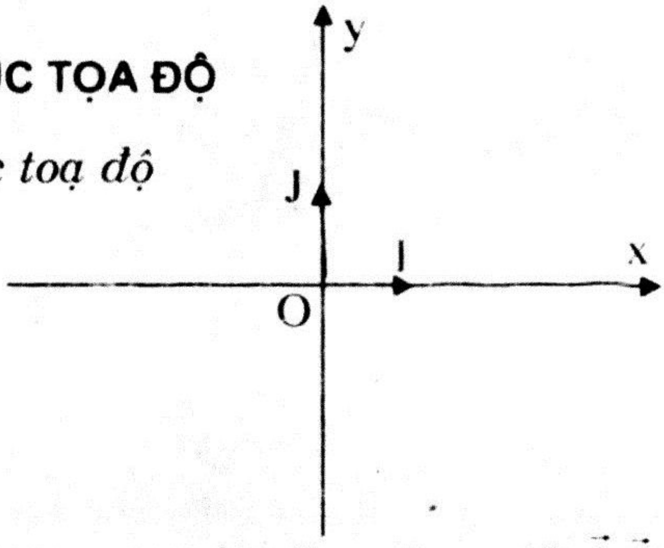
Chương 3

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

---

§ 1. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

1.1. *Hệ trục toạ độ*



Một *hệ trục toạ độ* Oxy (hay $(O; \vec{i}, \vec{j})$) bao gồm:

- Điểm O gọi là *gốc toạ độ*.

- Hai đường thẳng Ox và Oy vuông góc với nhau.

- Một điểm I trên tia Ox, một điểm J trên Oy sao cho: OI = OJ = 1 đơn vị dài.

Ta kí hiệu $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ và $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

Theo tính chất vectơ ta luôn có:

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1 \text{ và } \vec{i}\,.\,\vec{j} = 0.$$

Đường thẳng Ox và Oy lần lượt được gọi là *trục hoành* và *trục tung*.

1.2. *Toạ độ của vectơ*

Đối với hệ toạ độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, nếu vectơ $\vec{a}$ có thể viết dưới dạng: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì cặp số (x; y) được gọi là toạ độ của vectơ $\vec{a}$ và kí hiệu $\vec{a} = (x; y)$ hay $\vec{a}(x; y)$. Số thứ nhất x được gọi là *hoành độ*, số thứ hai y được gọi là tung độ của vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ: Tìm tọa độ của các vectơ sau:

$$\vec{p} = -\vec{i}\,,\ \vec{q} = 5\vec{j}\,,\ \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}\,;$$

$$\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j}\,,\ \vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j}\,,$$

$$\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{j} - \vec{i}).\ \vec{e} = 0{,}15\vec{i} + 1{,}3\vec{j}\,.$$

$$\vec{f} = \pi\vec{i} - \vec{j}\cos 24^{\circ}.$$

Giải. $\vec{p} = (-1\,;0)$, $\vec{q} = (0\,;5)$,

$$\vec{a} = (2 : 3) ; \vec{b} = (\frac{1}{3} ; -5) .$$

$$\vec{c} = (3 ; -4), \vec{d} = (-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}).$$

$$\vec{e} = (0.15 ; 1.3), \vec{f} = (\pi ; -\cos 24^0).$$

1.3. *Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ*

Cho $\vec{a} = (x;y)$ và $\vec{b} = (x';y')$, ta có:

1) $\vec{a} + \vec{b} = (x + x' ; y + y')$;

2) $k\vec{a} = (kx ; ky)$;

3) $\vec{a}\vec{b} = xx' + yy'$;

4) Với $x' \neq 0$, $y' \neq 0$, $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$ khi và chỉ khi $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$;

5) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$;

6) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{x.x' + y.y'}{\sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2}}$.

* **Đặc biệt, ta có:** $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

Ví dụ: Cho hai vectơ

$$\vec{e} = (4; 1) \text{ và } \vec{f} = (1; 4).$$

a) Tính góc $(\vec{e}, \vec{f})$.

b) Xác định tất cả các số m để vectơ $\vec{a} = \vec{e} + m\vec{f}$ vuông góc với trục hoành.

c) Xác định tất cả các số n để vectơ $\vec{b} = n\vec{e} + \vec{f}$ tạo với vectơ $\vec{i} + \vec{j}$ một góc 45^0.

***Giải.* a)** $\cos(\vec{e}, \vec{f}) = \dfrac{4.1 + 1.4}{\sqrt{16+1}.\sqrt{1+16}} = \dfrac{8}{17}$,

suy ra $(\vec{e}, \vec{f}) \approx 61^\circ 55'$.

b) Ta có $\vec{a} = (4 + m\ ;\ 1 + 4m)$. Do đó $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành khi và chỉ khi $\vec{a}.\vec{i} = 0 \Leftrightarrow 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

c) Ta có $\vec{b} = (4n + 1;\ n + 4)$, $\vec{i} + \vec{j} = (1; 1)$. Vì vectơ $\vec{b} = n\vec{e} + \vec{f}$ tạo với vectơ $\vec{i} + \vec{j}$ một góc bằng 45^0 nên ta có

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^0 = \frac{(4n+1)+(n+4)}{\sqrt{2}.\sqrt{(4n+1)^2+(n+4)^2}}$$

$$= \frac{5(n+1)}{\sqrt{2}\sqrt{17n^2+16n+17}}$$

$$\Leftrightarrow 5(n+1) = \sqrt{17n^2+16n+17}$$

$$\Leftrightarrow 25n^2 + 30n + 25 = 17n^2 + 16n + 17$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 7n + 4 = 0,$$

phương trình này vô nghiệm. Vậy không tồn tại n thoả mãn đề bài.

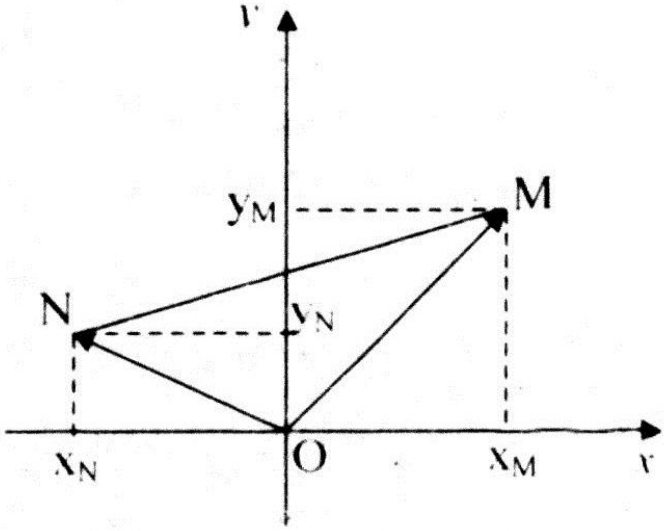
1.4. *Toạ độ của điểm*

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ cũng được gọi là toạ độ của điểm M.

Cho hai điểm $M(x_M\ ;\ y_M)$ và $N(x_N\ ;\ y_N)$, khi đó:

i) $\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M ; y_N - y_M)$;

ii) $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$.



1.5. *Toạ độ của trung điểm một đoạn thẳng và toạ độ của trọng tâm tam giác*

M là trung điểm AB khi và chỉ khi toạ độ của M là trung bình cộng các toạ độ tương ứng của hai điểm A, B.

G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi toạ độ của G là trung bình cộng các toạ độ tương ứng của ba đỉnh A, B, C.

Ví dụ: Cho ba điểm

A(–4; 1), B(2; 4), C(2; –2).

a) Ba điểm A, B, C có lập thành tam giác không?

b) Tìm toạ độ của trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra ba điểm đó thẳng hàng.

Giải. **a)** Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (6; 3),\ \overrightarrow{BC} = (0; -6),$$

hai vectơ này không cùng phương nên ba điểm A, B, C lập thành một tam giác.

b) Trọng tâm của ΔABC là

$$G\left(\frac{-4+2+2}{3}; \frac{1+4-2}{3}\right) \text{ hay } G(0; 1).$$

Điểm H(x; y) là trực tâm ΔABC khi và chỉ khi $\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 & (1) \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 & (2) \end{cases}$.

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (x + 4; y - 1)$, $\overrightarrow{BC} = (0 ; -6)$, $\overrightarrow{BH} = (x - 2 ; y - 4)$, $\overrightarrow{AC} = (6 ; -3)$. Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow -6(y - 1) = 0$, $y = 1$ và

$(2) \Leftrightarrow 6(x - 2) - 3(y - 4) = 0$

$\Leftrightarrow 2(x - 2) - y + 4 = 0.$

Thay $y = 1$ ta được $x = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}$.

Vậy $H(\frac{1}{2} ; 1)$.

Điểm I(x; y) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} IA = IB & (3) \\ IB = IC & (4) \end{cases} \text{ hay}$$

$$\begin{cases} (x+4)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 & (3') \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 & (4') \end{cases}.$$

Từ (4') suy ra $y - 4 = -y - 2$, $y = 1$. Thay $y = 1$ vào (3') ta được

$$(x + 4)^2 = (x - 2)^2 + 9,$$

giải ra ta được: $x = -\frac{1}{4}$. Vậy $I\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$. Từ đó ta có $\overrightarrow{GH} = \left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $\overrightarrow{GI} = \left(-\frac{1}{4}; 0\right)$, suy ra $-2\overrightarrow{GI} = \left(\frac{1}{2}; 0\right) = \overrightarrow{GH}$.

Hai vectơ $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{GI}$ cùng phương nên G, I, H thẳng hàng.

Chú ý. Để tìm tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, có thể xác định hai trung điểm P, Q của BC, AC rồi xác định tọa độ của I từ hệ thức:

$$\begin{cases} \overrightarrow{IP}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{IQ}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}.$$

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

2.1. *Phương trình tổng quát của đường thẳng*

2.1.1. Véctơ $\vec{n}$ khác vectơ $\vec{0}$ và vuông góc với đường thẳng Δ được gọi là *vectơ pháp tuyến* của đường thẳng Δ. Như vậy, mỗi đường thẳng có vô số vectơ pháp tuyến, những vectơ pháp tuyến này song song nhau.

2.1.2. Cho một điểm $M(x_0; y_0)$ và một vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$. Có duy nhất một đường thẳng đi qua M và nhận $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến.

2.1.3. Điều kiện cần và đủ để điểm $N(x; y)$ nằm trên đường thẳng Δ đi qua $M(x_0, y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A; B)$ là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

2.1.4. Mỗi đường thẳng trong mặt phẳng là tập hợp những điểm có toạ độ $(x; y)$ thoả mãn phương trình bậc nhất đối với hai ẩn số $Ax + By + C = 0$, với A, B không đồng thời bằng không. Phương trình

$$Ax + By + C = 0$$

được gọi là *phương trình tổng quát* của đường thẳng, đường thẳng này có $\vec{n}(A, B)$ là vectơ pháp tuyến.

2.1.5. *Các dạng đặc biệt của phương trình đường thẳng*

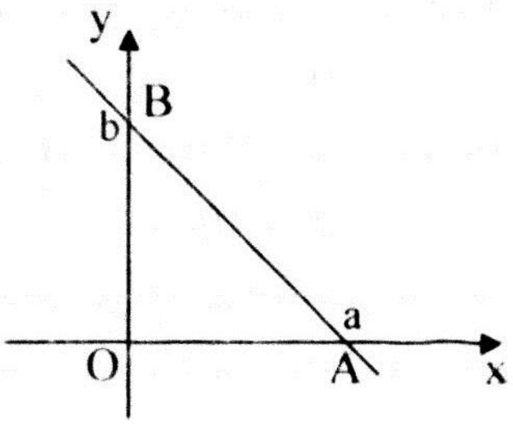
Đường thẳng $Ax + C = 0$ vuông góc với trục Ox (đường thẳng này nhận $\vec{n}(A, 0)$ làm vectơ pháp tuyến).

Đường thẳng $By + C = 0$ vuông góc với trục Oy (đường thẳng này nhận $\vec{n}(0, B)$ làm vectơ pháp tuyến).

Đường thẳng $Ax + By = 0$ đi qua gốc toạ độ (đường thẳng này nhận $\vec{n}(A, B)$ làm vectơ pháp tuyến).

2.1.6. Nếu $B \neq 0$ thì phương trình của Δ có dạng $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{A}$. Khi đó, số $k = -\frac{A}{B}$ gọi là hệ số góc của đường thẳng Δ.

2.1.7. Đường thẳng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ đi qua hai điểm $(a; 0)$ và $(0; b)$. Phương trình dạng như thế gọi là phương trình của đường thẳng theo đoạn chắn.



Chú ý.

a) Vì đường thẳng Ox đi qua $O(0; 0)$ và vuông góc với $\vec{j} = (0; 1)$, tức là có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(0; 1)$ nên nó có phương trình $0.(x - 0) + 1.(y - 0) = 0$, hay $y = 0$.

b) Đường thẳng Oy có phương trình $x = 0$ (do Oy) qua điểm $O(0; 0)$ và vuông góc với $\vec{i} = (1; 0)$).

c) Phương trình đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$ và song song với Ox, với $y_0 \neq 0$, là $y - y_0 = 0$.

d) Đường thẳng đi qua $M(x_0, y_0)$ và vuông góc với Ox sẽ nhận $\vec{i} = (1; 0)$ là vectơ pháp tuyến nên nó có phương trình:

$$1.(x - x_0) + 0.(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow x - x_0 = 0.$$

Ví dụ: Cho hai điểm

$$M_1(x_1 ; y_1); M_2(x_2 ; y_2),$$

hãy viết phương trình đường trung trực của đoạn thẳng M_1M_2.

Giải. Đường trung trực của M_1M_2 đi qua trung điểm $M_0\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ của M_1M_2 và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{M_1M_2}$. Nó có phương trình là

$$(x_2 - x_1)(x - \frac{x_1 + x_2}{2}) +$$

$$+(y_2 - y_1)(y - \frac{y_1 + y_2}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y +$$

$$+ x_2^2 - x_1^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0.$$

2.2. *Vị trí tương đối của hai đường thẳng*

Trong mặt phẳng toạ độ cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có phương trình :

$$\Delta_1 : \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad (1)$$

$$\Delta_2 : \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0. \qquad (2)$$

Số điểm chung của hai đường thẳng

(nếu có) bằng số nghiệm của hệ phương trình (1) và (2), ta có:

a) Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau khi và chỉ khi: $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

b) Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi: $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, đồng thời

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ hoặc } \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

c) Hai đường thẳng trùng nhau khi và chỉ khi:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Đặc biệt khi A_2, B_2, C_2 khác 0, ta có:

- Δ_1, Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$,
- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$,
- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

§ 3. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ VÀ CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

3.1. *Vectơ chỉ phương của đường thẳng*

Mỗi vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ nằm trên đường thẳng Δ hoặc trên đường thẳng song song với đường thẳng Δ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Như vậy, một đường thẳng có vô số vectơ chỉ phương, mỗi vectơ này vuông góc với mọi vectơ pháp tuyến. Nếu $\vec{n}(A; B)$ là một vectơ pháp tuyến thì $\vec{u}(-B; A)$ là một vectơ chỉ phương.

3.2. *Phương trình tham số của đường thẳng*

Hệ phương trình (1) sau đây được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng Δ, với tham số t:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases} \quad (a^2 + b^2 \neq 0). \qquad (1)$$

- Ứng với mỗi giá trị của tham số t, ta tính được x và y từ công thức (1), và có được điểm M(x; y) nằm trên Δ. Ngược lại, nếu điểm M nằm trên Δ thì phải có một số t sao cho toạ độ của điểm M thoả mãn hệ phương trình (1). Phương trình (1) chính là phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $A(x_0; y_0)$, biết vectơ chỉ phương $\vec{u}(a; b)$.

3.3. *Phương trình chính tắc của đường thẳng*

Cho đường thẳng Δ có phương trình

tham số: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$. Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$, bằng cách khử tham số t từ hai phương trình trên, ta đi đến phương trình (2) sau đây, được gọi là *phương trình chính tắc* của đường thẳng Δ:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}. \qquad (2)$$

Nếu $a = 0$, thì phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + bt \end{cases}$.

* Khi đó Δ có phương trình tổng quát: $x - x_0 = 0$ và không có phương trình chính tắc. Tương tự, nếu $b = 0$ thì Δ có phương trình tổng quát $y - y_0 = 0$ và không có phương trình chính tắc.

Chú ý.

1) Nếu bài toán không đòi hỏi dạng của phương trình đường thẳng, thì tùy từng trường hợp cụ thể, ta nên chọn dạng phương trình đường thẳng mà có thể viết được nhanh nhất.

2) Trong trường hợp cần xác định phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(x_1 ; y_1)$ và $B(x_2 ; y_2)$, mà bài toán không đòi hỏi dạng của phương trình đường thẳng, ta có thể áp dụng ngay công thức

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Thật vậy, vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1; y_2-y_1)$. Vì đường thẳng AB đi qua điểm $A(x_1; x_2)$ nên nó có phương trình tham số .

$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \end{cases}.$$

Khử t, dễ dàng có được công thức trên.

Ví dụ: Hãy xác định tọa độ điểm P trên đường thẳng Δ có phương trình

$$x-y+2=0$$

sao cho P cách đều A(0; 4) và B(4; −9).

Giải. Phương trình dạng tham số của Δ là $\begin{cases} x=t \\ y=2+t \end{cases}$. Vì $P\in\Delta$ nên P(t, 2 + t). Từ điều kiện PA = PB, ta có phương trình :

$$t^2+(t-2)^2=(t-4)^2+(11+t)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2+t^2-4t+4$$

$$=t^2-8t+16+121+22t+t^2$$

$$\Leftrightarrow 18t-133=0\Leftrightarrow t=\frac{133}{18}.$$

Suy ra toạ độ của điểm P là $\left(\frac{133}{18}; \frac{169}{18}\right)$.

§ 4. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

4.1. *Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng*

Trong mặt phẳng toạ độ cho đường thẳng Δ có phương trình tổng quát $Ax + By + C = 0$. Khi đó, khoảng cách $d(M ; \Delta)$ từ điểm $M(x_M; y_M)$ đến Δ là

$$d(M; \Delta) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Nếu gọi M' là hình chiếu (vuông góc) của M trên Δ, ta có: $\overrightarrow{M'M} = t.\vec{n}$. Trong quá trình chứng minh công thức khoảng cách trên (SGK), ta tính được

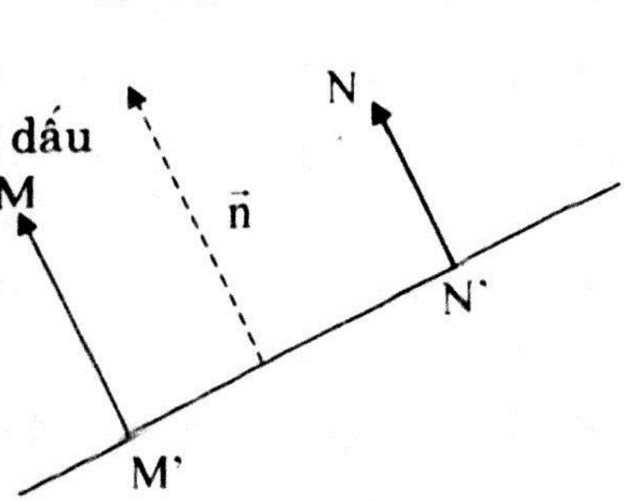
$$t = \frac{Ax_M + By_M + C}{A^2 + B^2}.$$

Tương tự nếu có điểm $N(x_N ; y_N)$ với N' là hình chiếu của N trên Δ thì ta cũng có: $\overrightarrow{N'N} = t'.\vec{n}$, trong đó

$$t' = \frac{Ax_N + By_N + C}{A^2 + B^2}.$$

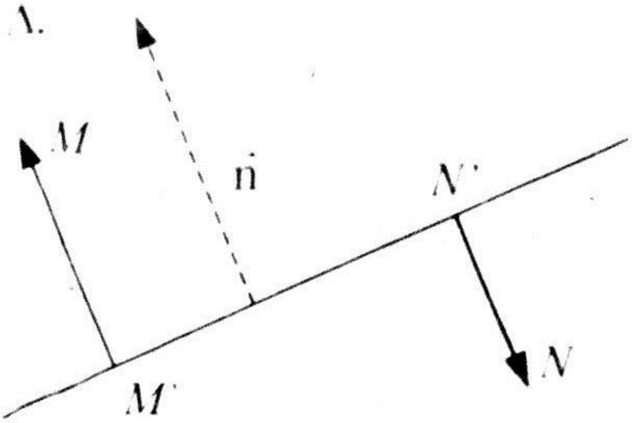
Nhận xét.

* t, t' cùng dấu khi và chỉ khi $\overrightarrow{M'M}$ và $\overrightarrow{N'N}$ cùng hướng,



nghĩa là M, N ở về một phía của Δ.

* t, t' khác dấu khi và chỉ khi $\overrightarrow{M'M}$ và $\overrightarrow{N'N}$ ngược hướng, nghĩa là M, N ở về hai phía của Δ.



Như vậy:

a) Hai điểm M, N nằm cùng phía đối với Δ khi và chỉ khi:

$$(Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C) > 0.$$

b) Hai điểm M, N nằm khác phía đối với Δ khi và chỉ khi:

$$(Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C) < 0.$$

Ví dụ: Hai điểm (7; 6) và (–1; 2) nằm về hai phía của đường thẳng y = x – 2. Thật vậy, $y = x - 2 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0$ và ta có

$$(7 - 6 + 2)(-1 - 2 + 2) < 0.$$

Ví dụ: Tìm tập hợp những điểm M(x; y) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Ax + By + C = 0 bằng h không đổi.

Giải. Ta có $d(M; \Delta) = \dfrac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = h$

$$\Leftrightarrow |Ax + By + C| = h\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} Ax + By + C + h\sqrt{A^2 + B^2} = 0 & (1) \\ Ax + By + C - h\sqrt{A^2 + B^2} = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Tập các điểm M là hai đường thẳng song song với đường thẳng đã cho, có phương trình tương ứng (1) và (2).

4.2. *Phương trình các đường phân giác*

Cho hai đường thẳng cắt nhau:

Δ_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ và

Δ_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Hai đường phân giác của hai góc tạo bởi hai đường thẳng đó có phương trình là

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \text{ hoặc}$$

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

***** ***Cách chọn đường phân giác trong (hoặc ngoài)***

Khi lập phương trình đường phân giác (chẳng hạn, AD của tam giác ABC), dùng 4.1.2, ta được hai phương trình, một phương trình biểu diễn phân giác trong và một phương trình biểu diễn phân giác ngoài. Để xét xem đâu là phân giác trong hoặc ngoài, ta thực hiện như sau: Chọn ra công thức ứng với dấu cộng (+) và kí hiệu biểu thức là $f(x; y) = 0$. Tính toạ độ của hai đỉnh còn lại, $B(x_1 ; y_1)$ và $C(x_2 ; y_2)$. Tiếp theo, thay toạ độ vào biểu thức phân giác, ta được $f(x_1 ; y_1)$ và $f(x_2 ; y_2)$. Khi đó:

Nếu $f(x_1 ; y_1).f(x_2 ; y_2) < 0$ thì $f(x ; y) = 0$ là phân giác trong.

Nếu $f(x_1 ; y_1).f(x_2 ; y_2) > 0$ thì $f(x ; y) = 0$ là phân giác ngoài.

Thực chất của việc làm trên là việc áp dụng nhận xét ở trang 130.

Ví dụ: Cho ΔABC trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, biết $A(3 ; -7)$, $B(9 ; -5)$, $C(-5 ; 9)$. Viết phương trình đường phân giác trong của góc lớn nhất của ΔABC.

Giải. Ta có $\overrightarrow{BC} = (-14; 14)$,

$$\overrightarrow{AC} = (-8; 16) \text{ và } \overrightarrow{AC} = (6; 2).$$

Dễ thấy BC > AC > AB, vậy BC là cạnh lớn nhất, nên góc BAC là góc lớn nhất, ta phải lập phương trình đường phân giác trong của góc A.

Cạnh AB đi qua hai điểm $A(3; -7)$ và $B(9; -5)$ nên AB có phương trình:

$$\frac{x-3}{9-3} = \frac{y+7}{-5+7}, \text{ hay } x - 3y - 24 = 0.$$

Cạnh AC đi qua hai điểm A(3; −7) và C(−5; 9) nên AC có phương trình:

$$\frac{x-3}{-5-3} = \frac{y+7}{9+7}, \text{ hay } 2x + y + 1 = 0.$$

Phân giác góc A:

$$\frac{x-3y-24}{\sqrt{10}} = \pm\frac{2x+y+1}{\sqrt{5}}, \text{ suy ra}$$

$$(1+2\sqrt{2})x-(3-\sqrt{2})y+(\sqrt{2}-24)=0,$$

hoặc $(1-2\sqrt{2})x-(3+\sqrt{2})y-(\sqrt{2}+24)=0$.

Để xét xem một trong hai đường thẳng trên đường nào là phân giác trong của góc A, ta đặt f(x, y) =

$$=(1+2\sqrt{2})x-(3-\sqrt{2})y+(\sqrt{2}-24)=0.$$

Khi đó, $f(x_B; y_B).f(x_C; y_C) = f(9; -5).f(-5; 9) < 0$, suy ra đường phân giác vừa chọn là phân giác trong, đường thẳng còn lại là phân giác ngoài. Vậy phân giác trong của góc lớn nhất của ΔABC là:

$$(1+2\sqrt{2})x-(3-\sqrt{2})y+(\sqrt{2}-24)=0.$$

4.3. *Góc giữa hai đường thẳng*

Hai đường thẳng a và b cắt nhau tạo thành bốn góc, góc nhỏ nhất trong bốn góc đó được gọi là *góc giữa hai đường thẳng a và b*, kí hiệu là (a, b). Khi a song song hoặc trùng với b, ta quy ước rằng góc giữa chúng bằng 0^0. Ta luôn có $(a, b) \leq 90^0$.

Gọi $\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của a, b, ta có

$(a, b) = (\vec{u}; \vec{v})$ nếu $(\vec{u}; \vec{v}) \leq 90^0$;

$(a, b) = 180^0 - (\vec{u}; \vec{v})$ nếu $(\vec{u}; \vec{v}) > 90^0$.

Chú ý. Giả sử hai đường thẳng cho bởi phương trình $y = k_1x + b_1$ và $y = k_2x + b_2$. Gọi φ là góc giữa chúng, ta có:

$$\cos\varphi = \frac{|k_1k_2 + 1|}{\sqrt{(1 + k_1^2)(1 + k_2^2)}}.$$

Suy ra các sự kiện quen thuộc trong đại số sau đây: Điều kiện vuông góc của hai đường thẳng là $k_1k_2 = -1$. Điều kiện song song của hai đường thẳng là $k_1 = k_2$, với $b_1 \neq b_2$.

* Ngoài ra ta còn có công thức sau khi $k_1k_2 \neq -1$: $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$.

Chứng minh. Từ công thức

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1$$

ta suy ra $\operatorname{tg}^2\varphi =$

$$= \frac{(1 + k_1^2)(1 + k_2^2)}{(k_1k_2 + 1)^2} - \frac{(k_1k_2 + 1)^2}{(k_1k_2 + 1)^2} = \frac{(k_2 - k_1)^2}{(k_1k_2 + 1)^2},$$

suy ra điều phải chứng minh.

§ 5. ĐƯỜNG TRÒN

5.1. *Phương trình đường tròn*

Trên mặt phẳng toạ độ , cho đường tròn (C) tâm I(a; b) có bán kính R. Điểm M(x; y) thuộc đường tròn khi và chỉ khi IM = R, hay là: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ (*).

Ta gọi phương trình (*) là phương trình của đường tròn (C).

5.2. *Nhận dạng phương trình đường tròn*

Phương trình (*) tương đương với

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0,$$

như vậy, mỗi đường tròn trong mặt phẳng toạ độ đều có phương trình dạng:

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0. \qquad (**)$$

Ngược lại, phương trình:

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0,$$

với điều kiện $A^2+B^2>C$, là phương trình của đường tròn có tâm $I(-A;-B)$ và có bán kính $R=\sqrt{A^2+B^2-C}$.

Chú ý. (**) chỉ là phương trình đường tròn khi $A^2+B^2>C$. Khi $A^2+B^2<C$ hay $A^2+B^2-C<0$, tập hợp các điểm M thoả mãn (**) là tập rỗng. Khi $A^2+B^2=C$ hay $A^2+B^2-C=0$, tập hợp các điểm M chỉ có một điểm có toạ độ $(-A; -B)$.

Ví dụ: Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $2MA^2 - 3MB^2 = k^2$, trong đó $A(1 ; 1)$ và $B(9 ; 7)$.

Giải. Gọi toạ độ của M là $(x ; y)$, với $A(1 ; 1)$, $B(9 ; 7)$, ta có: $2MA^2 - 3MB^2 = k^2$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2 + 2(y-1)^2 -$$

$$-3(x-9)^2 - 3(y-7)^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - y^2 + 50x + 38y - 386 - k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 50x - 38y + 386 + k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-25)^2 + (y-19)^2 = 600 - k^2. \qquad (*)$$

Vậy:

- Nếu $k^2 < 600$, quỹ tích M là đường tròn có phương trình $(*)$, với tâm $I = (25 ; 19)$, và bán kính $R = \sqrt{600 - k^2}$.
- Nếu $k^2 = 600$, quỹ tích M là một điểm $I = (25 ; 19)$.
- Nếu $k^2 > 600$, không tìm được điểm M nào thoả mãn điều kiện của đề bài.

5.3. *Tiếp tuyến của đường tròn*

Cho đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$, bán kính R và điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên (C). Phương trình đường thẳng tiếp xúc với (C) tại M là

$$(a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0.$$

5.4. *Bài toán tìm tâm và bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác*

Cần chú ý vận dụng tính chất quen thuộc: Tâm đường tròn nội tiếp là giao điểm ba đường phân giác, tâm này cách đều ba cạnh. Tâm đường tròn ngoại tiếp là giao điểm ba đường trung trực, tâm này cách đều ba đỉnh. Đối với bài toán về đường tròn ngoại tiếp, nếu biết ba đỉnh, có thể thay toạ độ ba đỉnh vào phương trình tổng quát của đường tròn rồi xác định các thông số cần thiết.

Ví dụ: Viết phương trình của đường tròn tiếp xúc với hai trục toạ độ và đi qua điểm (2; 1).

Giải. Để ý rằng điểm (2; 1) nằm ở góc phần tư thứ nhất nên đường tròn qua điểm (2; 1) chỉ có thể tiếp xúc với hai trục lần lượt tại các điểm thuộc các nửa trục Ox, Oy. Từ đó, nếu đặt tâm I(a, b) và bán kính R thì phương trình của đường tròn là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \text{ với } a > 0, b > 0.$$

Đường tròn tiếp xúc với Ox $\Leftrightarrow |b| = R$.

Đường tròn tiếp xúc với Oy $\Leftrightarrow |a| = R$.

Kết hợp với điều kiện đường tròn đi qua điểm (2; 1) ta có phương trình:

$$(2-a)^2 + (1-a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a = 1 \text{ ; } a = 5.$$

* Với a = 1 ta có phương trình đường tròn:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

* Với a = 5 ta có phương trình đường tròn:

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25.$$

Chú ý. Nếu không có nhận xét ban đầu, ta phải giải hệ:

$$\begin{cases}(2-a)^2 + (1-b)^2 = a^2 \\ |a| = |b|\end{cases}.$$

Khi a = b, ta được kết quả trên.

Khi a = – b, hệ vô nghiệm.

§ 6. ĐƯỜNG ELIP

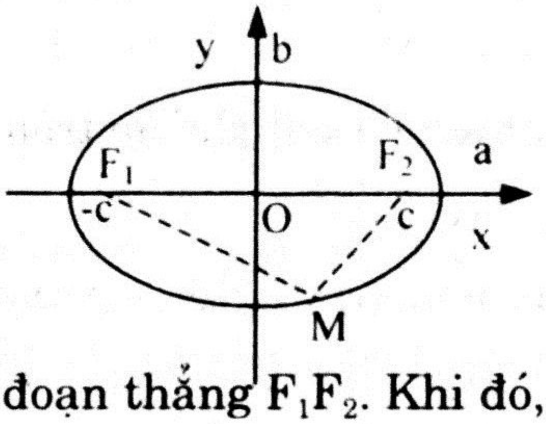
6.1. *Định nghĩa đường elip*

Cho hai điểm cố định F_1 và F_2, với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$. Đường elip (còn gọi là elip) là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ trong đó $a > c$ là số không đổi.

Ta nói F_1 và F_2 là các *tiêu điểm* của elip. Khoảng cách 2c được gọi là *tiêu cự* của elip. Các đoạn thẳng MF_1 và MF_2 được gọi là các *bán kính qua tiêu* của điểm M (với M nằm trên elip).

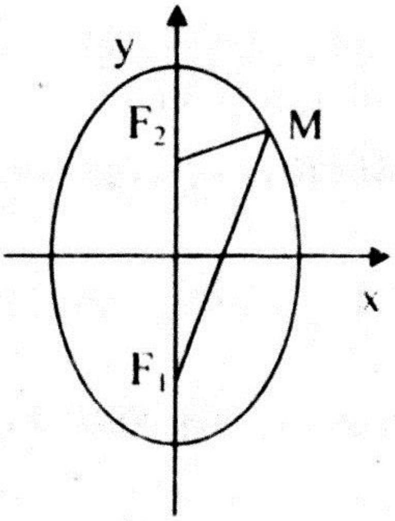
6.2. *Phương trình chính tắc của đường elip*

* Chọn hệ trục toạ độ sao cho trục hoành



Ox đi qua hai tiêu điểm F_1 và F_2, còn trục Oy là đường trung trực của đoạn thẳng F_1F_2. Khi đó, phương trình elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó,

$$a^2 - c^2 = b^2,\ a > b > 0.$$



* Tương tự, nếu chọn hệ trục toạ độ sao cho Oy là đường thẳng đi qua hai tiêu điểm F_1 và F_2, còn Ox là trung trực đoạn F_1F_2 thì ta được phương trình elip có dạng:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

trong đó $a^2 - c^2 = b^2$, $a > b > 0$.

Ngược lại: Nếu điểm M có toạ độ (x; y) thoả mãn một trong hai phương trình trên thì $MF_1 + MF_2 = 2a$, do đó M thuộc một elip.

Các phương trình trên được gọi là *phương trình chính tắc* của elip đã cho.

* *Công thức tính độ dài các bán kính qua tiêu điểm M:*

$$MF_1 = a + \frac{cx}{a} \text{ và } MF_2 = a - \frac{cx}{a}.$$

6.3. *Chú ý khi làm toán*

6.3.1. Khi nhìn vào phương trình chính tắc của elip cần phải *so sánh hai mẫu số ở vế trái* để xác định xem hai tiêu điểm của elip nằm trên trục nào, từ đó xác định các yếu tố còn lại.

6.3.2. Có hai loại bài toán thường gặp khi tìm phương trình chính tắc của elip.

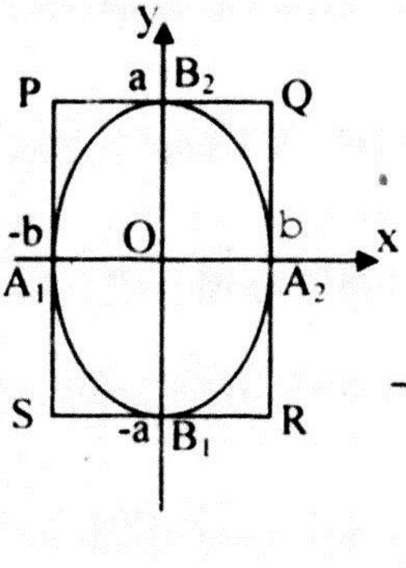
a. *Loại biết tiêu điểm của elip nằm trên trục nào.* Đối với loại toán này chúng ta chỉ cần dùng phương trình tương ứng.

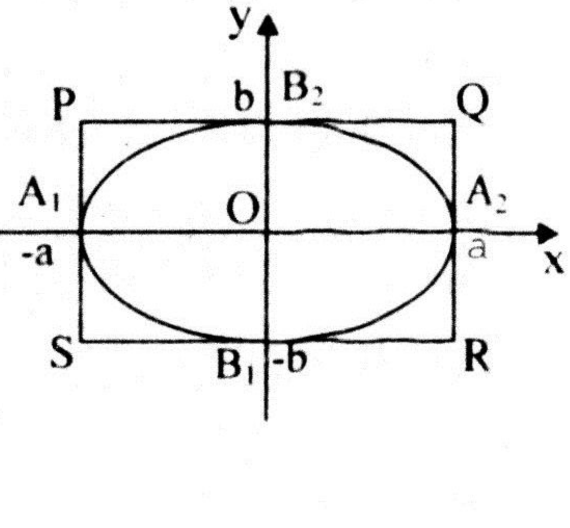
b. *Loại chưa xác định được vị trí của hai tiêu điểm* (chẳng hạn biết độ dài một trục và tâm sai). Với loại này ta phải xét cả hai trường hợp của vị trí tiêu điểm (trên trục tung hoặc hoành). Chú ý rằng trong chương trình 12 cũ, ta không cần xét hai trường hợp, bởi vì chương trình cũ quy định rằng *chỉ có một dạng* phương trình chính tắc, ứng với vị trí hai tiêu điểm nằm trên trục hoành.

6.4. *Hình dạng và tâm sai của elip*

6.4.1. *Hình chữ nhật cơ sở*

Elip có phương trình chính tắc sẽ nhận các trục toạ độ làm trục đối xứng và gốc toạ độ là tâm đối xứng. Nó cắt trục Ox tại hai điểm A_1 và A_2, cắt trục Oy tại hai điểm B_1 và B_2. Bốn điểm đó gọi là *đỉnh* của elip. Qua A_1 và A_2, vẽ hai đường thẳng song song với trục tung, qua B_1 và B_2, vẽ hai đường thẳng song song với trục hoành. Bốn đường thẳng đó tạo thành hình chữ nhật PQRS. Ta gọi đó là *hình chữ nhật cơ sở* của elip. Chiều dài 2a và chiều rộng 2b của hình chữ nhật cơ sở lần lượt được gọi là *độ dài trục lớn* và *độ dài trục bé* của elip. Bốn đỉnh của elip nằm trên hình chữ nhật cơ sở. Bất kì điểm nào của elip mà không phải là đỉnh cũng đều nằm bên trong hình chữ nhật cơ sở của nó.





6.4.2. *Tâm sai của elip*

Ta gọi tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip là *tâm sai* của elip đó, kí hiệu là e. Như vậy $e = \frac{c}{a}$. Rõ ràng là $0 < e < 1$.

a) Nếu tâm sai e càng bé (tức càng gần 0) thì hình chữ nhật cơ sở càng gần với hình vuông, do đó đường elip càng gần với đường tròn.

b) Nếu tâm sai e càng lớn (tức càng gần 1) thì hình chữ nhật cơ sở của nó càng "dẹt", do đó đường elip cũng càng "dẹt".

Ví dụ: Cho elip có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Qua một tiêu điểm của elip này, ta kẻ đường vuông góc với trục hoành, đường thẳng này cắt elip tại A và B.

Tính độ dài AB.

. ***Chú ý.*** Đề bài nói: *cho elip có phương trình* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, thì a và b ở đây là các số tuỳ ý chứ *không có nghĩa* là $a > b$ như đã nói trong 5.2. Chú thích này rất quan trọng, vì nếu không để ý như thế, ta dễ chỉ xét một trường hợp $a > b$ mà thôi.

Giải. * Xét trường hợp $a < b$, ta thấy ngay độ dài của AB là 2b.

* Xét trường hợp elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b$. Đường thẳng vuông góc với Ox tại tiêu điểm này hoặc tiêu điểm kia đều cho ta độ dài AB bằng nhau.

Do đó, có thể giả sử đường thẳng đó đi qua tiêu điểm $F_1 = (-c; 0)$, đường thẳng này có phương trình $x = -c$. Thay vào phương trình của elip ta được $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ hay $y^2 = b^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{a^2}$. $y = \pm\frac{b^2}{a}$.

Như vậy toạ độ hai giao điểm là

$$A = \left(-c; -\frac{b^2}{a}\right) \text{ và } B = \left(-c; \frac{b^2}{a}\right).$$

Suy ra ta có $AB = \frac{2b^2}{a}$.

§ 7. ĐƯỜNG HYPEBOL

7.1. *Định nghĩa đường hypepol*

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 có khoảng cách $F_1F_2 = 2c$. *Đường hypebol* (còn gọi là hypebol) là tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$ trong đó a là số dương không đổi, $a < c$. Ta gọi F_1, F_2 là các *tiêu điểm* của hypebol.

Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ được gọi là *tiêu cự* của hypebol.

Nếu M là một điểm nằm trên hypebol thì các đoạn thẳng MF_1 và MF_2 được gọi là các *bán kính qua tiêu* của điểm M.

7.2. *Phương trình chính tắc của hypebol*

Ta chọn một hệ trục toạ độ sao cho trục hoành Ox đi qua hai tiêu điểm F_1 và F_2. Trục Oy là đường trung trực của F_1F_2. Khi đó $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ và phương trình hypebol có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (*)$$

trong đó $b^2 = c^2 - a^2$. Nếu chọn trục tung đi qua hai tiêu điểm của hypebol thì phương trình hypebol có dạng:

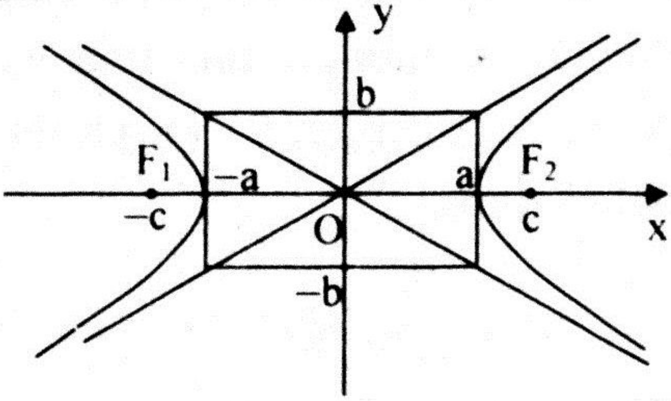
$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \qquad (**)$$

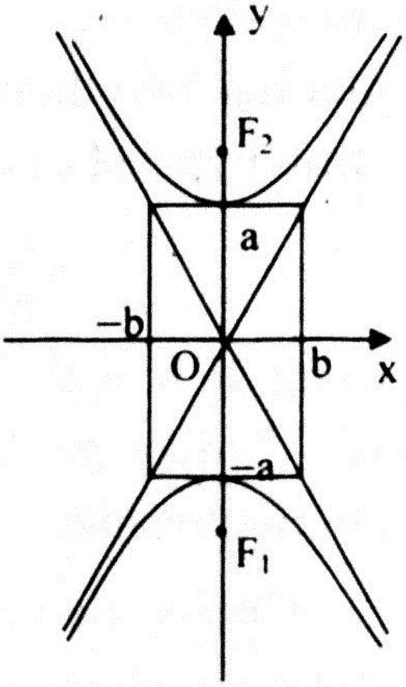
trong đó $b^2 = c^2 - a^2$. Các phương trình (*) và (**) được gọi là các *phương trình chính tắc* của hypebol.

Chú ý. So với chương trình cũ, chỉ có một dạng phương trình chính tắc, đó là (*). Do đó, khi làm bài tập, *nếu chưa xác định được vị trí của hai tiêu điểm* (chẳng hạn, biết a và c như ví dụ dưới đây) thì ta phải xét cả hai trường hợp của vị trí tiêu điểm (trên trục tung hoặc trục hoành).

7.3. *Hình dạng của hypebol*

a) Gốc toạ độ O là tâm đối xứng; Ox, Oy là hai trục đối xứng của hypebol. Trục đối xứng chứa hai tiêu điểm được gọi là *trục thực*, trục kia được gọi là *trục ảo* của hypebol.





b) Hypebol (*) hoặc (**) cắt trục thực ở hai điểm, ta gọi là các *đỉnh* của hypebol. Khoảng cách 2a giữa hai đỉnh được gọi là *độ dài trục thực*, 2b được gọi là *độ dài trục ảo*.

c) Ta gọi tỉ số $\frac{c}{a} = e$ giữa tiêu cự và độ dài trục thực là *tâm sai* của đường hypebol. Chú ý rằng ta luôn có e > 1 (khác với trường hợp elip: $0 < e < 1$).

d) *Đường tiệm cận*: Hypebol

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

có hai đường tiệm cận là hai đường thẳng có phương trình $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ và $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$.

Hypebol: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ có hai đường tiệm cận là hai đường thẳng có phương trình $-\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 0$ và $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 0$.

Chú ý:

1) Hypebol (với phương trình như trên) có hai đường tiệm cận vuông góc với nhau khi và chỉ khi $a = b$.

2) Tích các khoảng cách từ một điểm tuỳ ý trên đường hypebol đến hai đường tiệm cận là một số không đổi.

Chứng minh. Xét hypebol

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hai đường tiệm cận của (H) là:

$$\Delta_1: \; y = \frac{b}{a}x \text{ hay } \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0;$$

$$\Delta_2: \; y = -\frac{b}{a}x \text{ hay } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

Điểm $M(x_0; y_0) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

Ta có tích các khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận không đổi, bởi vì

$$\frac{\left|\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \cdot \frac{\left|\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{\left|\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right|}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} =$$

$$\frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Với hypebol dạng chính tắc kia, tiến hành tương tự.

§ 8. ĐƯỜNG PARABOL

8.1. *Định nghĩa đường parabol*

Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp những điểm M có khoảng cách đến F bằng khoảng cách từ nó đến Δ được gọi là *đường parabol* (hay parabol). Điểm F được gọi là tiêu điểm của parabol. Đường thẳng Δ được gọi là *đường chuẩn* của parabol. Khoảng cách d(F,Δ) = p từ F đến Δ được gọi là *tham số tiêu* của parabol.

8.2. *Phương trình chính tắc của parabol*

Cho parabol với tiêu điểm F và đường

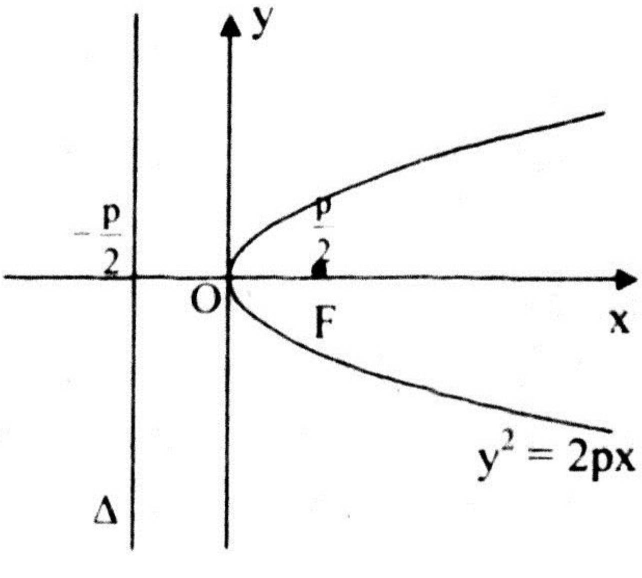
chuẩn Δ. Chọn hệ trục toạ độ theo những cách khác nhau như hình bên dưới, ta sẽ có các dạng *phương trình chính tắc* của parabol như sau (với $p > 0$):

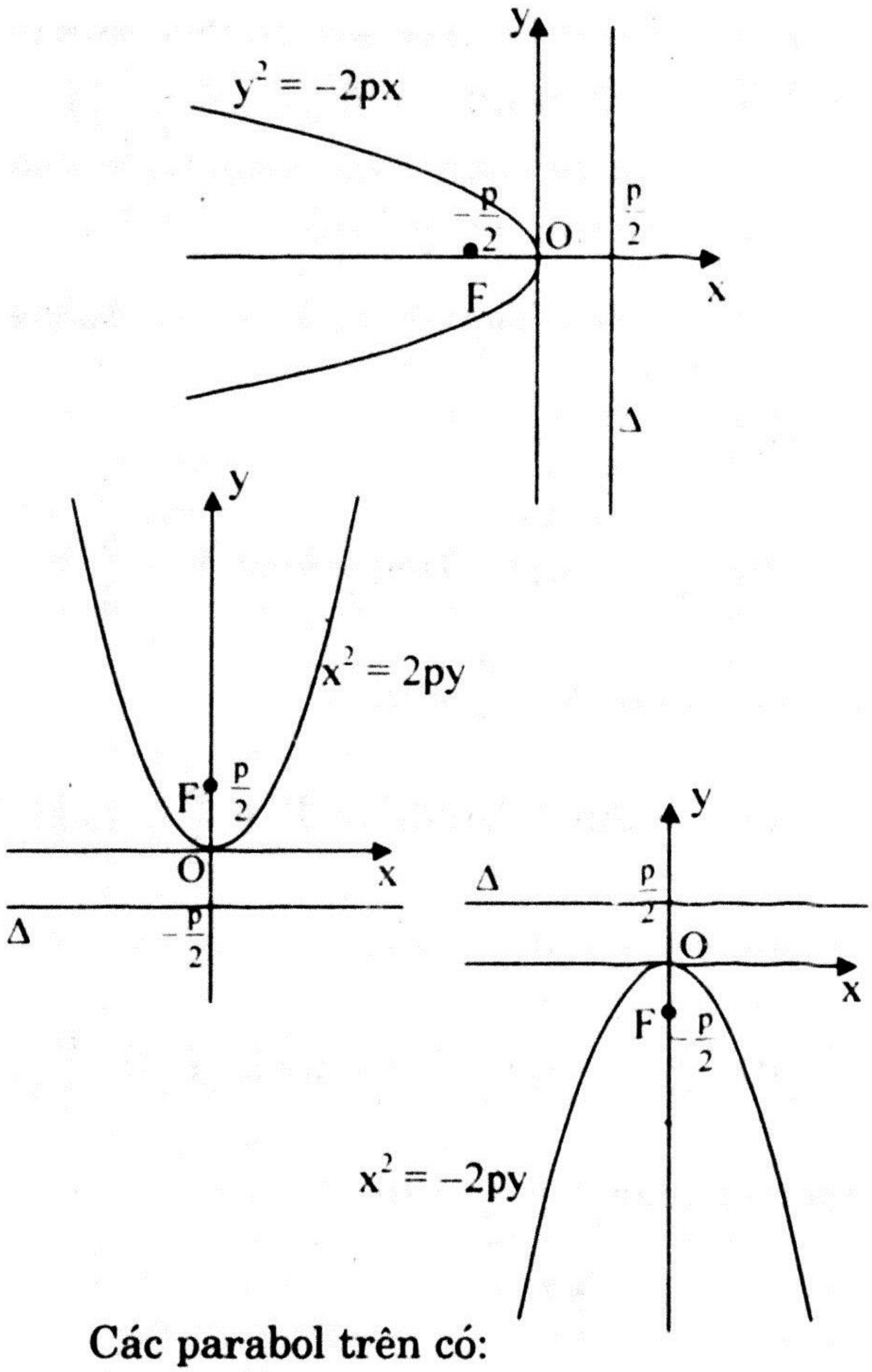
a) $y^2 = 2px$. Tiêu điểm: $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, **đường chuẩn:** $x + \frac{p}{2} = 0$.

b) $y^2 = -2px$. Tiêu điểm: $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$, **đường chuẩn:** $x - \frac{p}{2} = 0$.

c) $x^2 = 2py$. Tiêu điểm: $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, **đường chuẩn:** $y + \frac{p}{2} = 0$.

d) $x^2 = -2py$. Tiêu điểm: $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$, **đường chuẩn:** $y - \frac{p}{2} = 0$.




y
$y^2 = -2px$
$-\frac{p}{2}$
O
$\frac{p}{2}$
F
x
Δ
y
$x^2 = 2py$
F
$\frac{p}{2}$
O
x
Δ
$-\frac{p}{2}$
y
Δ
$\frac{p}{2}$
O
x
F
$-\frac{p}{2}$
$x^2 = -2py$

Các parabol trên có:

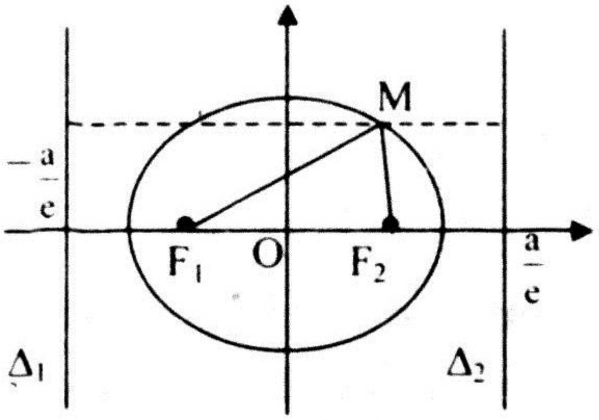
- Ox (hoặc Oy) là trục đối xứng của parabol.
- Parabol cắt trục Ox (hoặc Oy) ở một điểm O và đó cũng là điểm duy nhất trên Oy (hoặc Ox) thuộc parabol. Gốc toạ độ O được gọi là *đỉnh* của parabol.

§ 9. BA ĐƯỜNG CÔNIC

9.1. *Đường chuẩn của elip*

Cho elip có phương trình chính tắc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0).$$



Khi đó, đường thẳng Δ_1: $x + \frac{a}{e} = 0$ được gọi là *đường chuẩn của elip,* ứng với tiêu điểm $F_1(-c; 0)$, đường thẳng Δ_2: $x - \frac{a}{e} = 0$ được gọi là *đường chuẩn của elip,* ứng với tiêu điểm $F_2(c; 0)$.

Tính chất: Với mọi điểm M của elip ta luôn luôn có

$$\frac{MF_1}{d(M;\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M;\Delta_2)} = e \ (e < 1).$$

9.2. *Đường chuẩn của hypebol*

Cho hypebol (H) có phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

các đường thẳng

$$\Delta_1: x + \frac{a}{e} = 0 \text{ và } \Delta_2: x - \frac{a}{e} = 0$$

được gọi là *đường chuẩn* của (H) ứng với các tiêu điểm $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$.

Tính chất: Với mọi điểm M của (H) ta luôn luôn có

$$\frac{MF_1}{d(M;\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M;\Delta_2)} = e > 1.$$

9.3. *Định nghĩa đường cônic*

Cho điểm F cố định và đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M sao cho tỉ số $\frac{MF}{d(M;\Delta)} = e$, với $e > 0$ là số không đổi, được gọi là một *đường cônic.*

Ta gọi F là *tiêu điểm*, Δ là *đường chuẩn*, và e là *tâm sai* của cônic đó. Từ định nghĩa trên, kết hợp với tính chất của elip, parabol, hypebol, ta có kết luận: ***Elip là đường cônic có tâm sai e < 1. Parabol là đường cônic có tâm sai e = 1. Hypebol là đường cônic có tâm sai e > 1.***

Ví dụ: Viết phương trình các đường cônic trong mỗi trường hợp sau đây:

a) Tiêu điểm F(2; 3) và đường chuẩn $y = 0$, tâm sai $e = 1$.

b) Tiêu điểm F(0; 3) và đường chuẩn

$y = 0$, tâm sai $e = \frac{1}{2}$.

Giải. **a)** Giả sử có điểm **M** = **(x ; y)** thuộc cônic đã cho thì

$$MF = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}.$$

Khoảng cách d từ M đến đường chuẩn $y = 0$ là : $d = |y|$. Theo định nghĩa của đường cônic ta có $\frac{MF}{d} = e$ hay $\frac{MF}{|y|} = 1$. Từ đó ta có $MF^2 = y^2$ hay $(x-2)^2 + (y-3)^2 = y^2$ hay $x^2 - 4x - 6y + 13 = 0$. Đó là phương trình cônic đã cho, cônic này là đường parabol vì $e = 1$.

b) Giả sử có điểm $M = (x ; y)$ thuộc cônic đã cho thì

$$MF = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}.$$

Khoảng cách d từ M đến đường chuẩn $y = 0$ là $d = |y|$. Theo định nghĩa của cônic ta có: $\frac{MF}{d} = e$ hay $\frac{MF}{|y|} = \frac{1}{2}$ hay $2MF = |y|$. Từ đó ta có $4[x^2 + (y-3)^2] = y^2$ hay $4x^2 + 3y^2 - 24y + 36 = 0$. Đó là phương trình cônic đã cho, nó là elip vì $e < 1$.

* ***Chú ý*** *về bài toán quỹ tích trong mặt phẳng toạ độ*

Để tìm quỹ tích một điểm M(x; y), ta

thường dựa vào các tính chất đã cho để tính được x và y, phụ thuộc vào một tham số m nào đó. Sau đó, khử m, ta được phương trình biểu diễn đường chứa điểm M, đó chính là phương trình của quỹ tích. Tuy nhiên, cũng có khi tìm được ngay phương trình quỹ tích mà không cần khử tham số.

Ví dụ: Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho hai đường thẳng có phương trình: (d_1): $(a-b)x+y-1=0$ và

$$(d_2):\ (a^2-b^2)x+ay-b=0,$$

trong đó $b^2=4a^2+1$. Tìm quỹ tích các giao điểm M của (d_1), (d_2) khi a thay đổi.

Hướng dẫn: Để ý rằng do điều kiện $b^2=4a^2+1$, không thể xảy ra trường hợp b = 0 hoặc b = a. Từ hệ: $\begin{cases}(a-b)x+y=1\\(a^2-b^2)x+ay=b\end{cases}$

suy ra toạ độ giao điểm M là

$$M(x;y)=M\left(-\frac{1}{b};\frac{a}{b}\right).$$

Từ đây, kết hợp $b^2=4a^2+1$ suy ra tập hợp điểm M là elip có phương trình chính tắc:

$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1.$$

MỤC LỤC

Phần ĐẠI SỐ

Chương 1
MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP 3
Chương 2
HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI 14
Chương 3
PHƯƠNG TRÌNH
HỆ PHƯƠNG TRÌNH 27
Chương 4
BẤT ĐẲNG THỨC
BẤT PHƯƠNG TRÌNH 47
Chương 5
THỐNG KÊ 66
Chương 6
GÓC LƯỢNG GIÁC
VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC 79

Phần HÌNH HỌC

Chương 1
VECTƠ 87
Chương 2
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC
VÀ TRONG ĐƯỜNG TRÒN 100
Chương 3
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ
TRONG MẶT PHẲNG 116

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
ĐT (04) 9715012; (04) 7685236.
Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn
***

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập nội dung
LAN HƯƠNG
Sửa bản in
ĐINH THU TRANG
Trình bày bìa
DIÊN NGUYÊN

SỔ TAY TOÁN 10
Mã số: 1L-20 ĐH2006
In 2000 cuốn, khổ 10x18 tại Công ti cổ phần in Tân Bình
Số xuất bản: 85-2006/CXB/39-01/ĐHQGHN, ngày 24/01/2006.
Quyết định xuất bản số: 77 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2006